

Intégration sur un segment

1 Intégrale d'une fonction continue positive

1.1 Aire sous la courbe

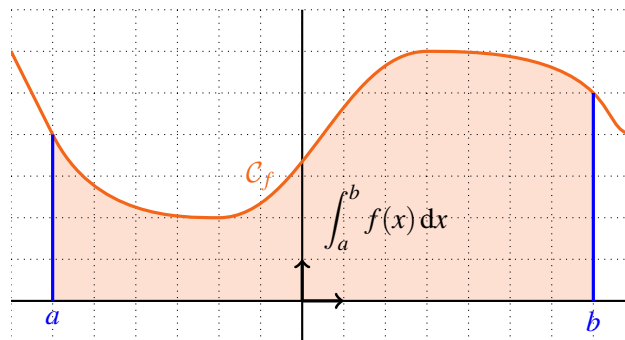
Définition 1 : On considère un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) . Soit $I(1;0)$, $K(1;1)$ et $J(0;1)$.

On appelle unité d'aire du repère (O, \vec{i}, \vec{j}) l'aire du rectangle $OIKJ$.

Dans tout ce chapitre, on se place désormais dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Définition 2 : Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$. On appelle C_f la courbe de la fonction f dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

L'aire du domaine délimité par C_f , par l'axe des abscisses et par les droites d'équation $x = a$ et $x = b$, exprimée en unité d'aire se note $\int_a^b f(x) dx$ et s'appelle l'intégrale de $f(x)$ pour x allant de a à b .

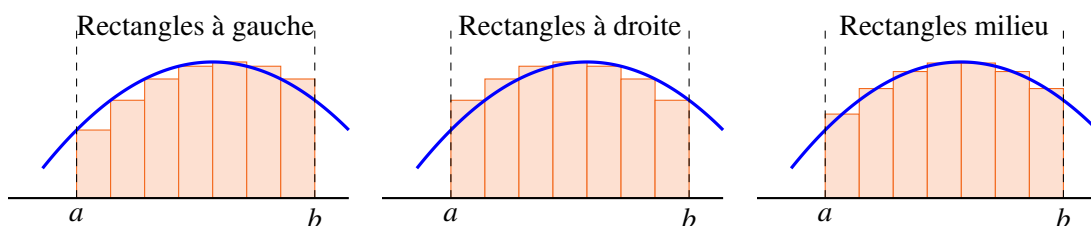


■ **Exemple 1 :** Il est possible d'encadrer l'aire sous la courbe en utilisant le quadrillage.

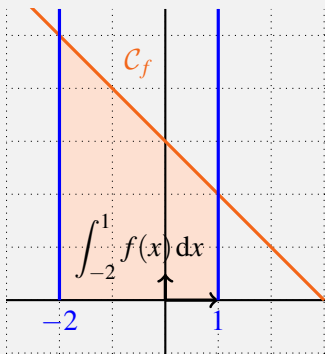
Ici, l'aire sous la courbe est composée de 44 carreaux entiers, l'intégrale est donc supérieure ou égale à 44. Par ailleurs, si on ajoute les 17 carreaux que traverse la courbe, on a alors que l'intégrale est inférieure à 61.

$$\text{On a alors } 44 \leq \int_a^b f(x) dx \leq 61.$$

La notation de l'intégrale est due à Leibniz : pour calculer l'aire sous une courbe, Leibniz l'approchait par des rectangles de largeur de plus en plus petite. La hauteur des rectangles en x était $f(x)$ et leur largeur, notée dx , se rapprochait de 0 : on faisait donc la somme des $f(x) dx$ entre a et b . Le symbole \int de l'intégrale n'est autre qu'un S allongé qui signifie justement "somme".



■ **Exemple 2 :** Pour tout réel x , on pose $f(x) = 6 - 2x$. On cherche la valeur de $\int_{-2}^1 f(x) dx$.



La fonction f est continue sur $[-2; 1]$ et, pour tout réel $x \in [-2; 1]$, on a bien $f(x) \geq 0$.

Le polygone délimité par la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -2$ et $x = 1$ est un trapèze.

L'aire d'un trapèze dont les côtés parallèles ont pour longueur b et B et dont la hauteur vaut h est de $\frac{(B+b)h}{2}$.

Ici, on a $B = f(-2) = 10$, $b = f(1) = 4$ et $h = 1 - (-2) = 3$.

Ainsi,

$$\int_{-2}^1 f(x) dx = \frac{(10+4) \times 3}{2} = 21.$$

1.2 Premières propriétés

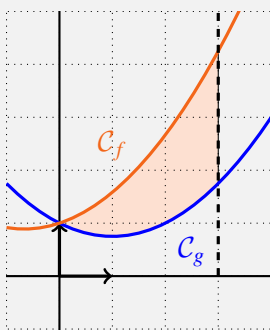
Propriété 1 : Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$.

On suppose que pour tout réel $x \in [a, b]$, on a $f(x) \geq g(x)$.

L'aire délimitée par les courbes de f et de g ainsi que les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ vaut $\int_a^b (f - g)(x) dx$.

Il est alors possible de déterminer l'aire entre deux courbes sans même savoir l'aire sous chacune de ces deux courbes.

■ **Exemple 3 :** Pour tout réel x , on pose $f(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{3} + 1$ et $g(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + 1$. On souhaite déterminer l'aire entre les courbes de f et g entre les abscisses 0 et 3.



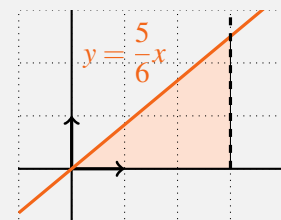
Pour tout réel $x \in [0; 3]$, on a

$$f(x) - g(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{3} + 1 - \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + 1 \right) = \frac{5x}{6}.$$

Cette quantité est positive sur $[0; 3]$, L'aire entre la courbe de f et celle de g entre les abscisses 0 et 3 vaut donc $\int_0^3 \frac{5}{6}x dx$.

Or, cette intégrale correspond à l'aire d'un triangle dont la base a pour longueur 3 et la hauteur associée vaut $\frac{5}{6} \times 3$ soit $\frac{5}{2}$.

Cette aire vaut $\frac{1}{2} \times 3 \times \frac{5}{2}$, soit $\frac{15}{4}$.



Ainsi, l'aire entre les courbes de f et de g entre les abscisses 0 et 3 vaut $\frac{15}{4}$ unités d'aire.

Propriété 2 : Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle I et $a \in I$.

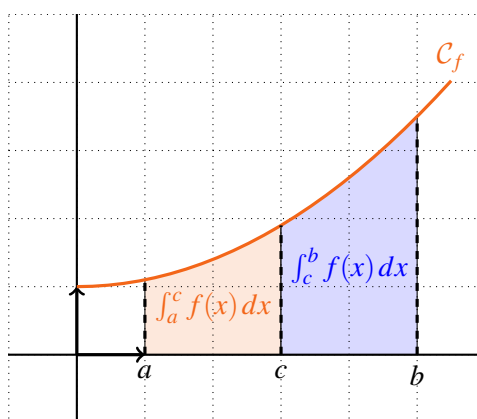
On a alors $\int_a^a f(x) dx = 0$.

Démonstration 1 : Il suffit de remarquer que le domaine ainsi délimité est vide. \square

Propriété 3 — Relation de Chasles : Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a, b]$, alors pour tout réel $x \in [a, b]$, on a

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt.$$

Cette relation traduit le fait que le domaine délimité par les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ peut-être découpé en deux-sous domaines : celui délimité par les droites d'équation $x = a$ et $x = c$ et celui délimité par les droites d'équation $x = c$ et $x = b$.



Du fait de ces deux dernières propositions, on est amené à poser la définition suivante.

Définition 3 : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. On note alors

$$\int_b^a f(t) dt = - \int_a^b f(t) dt.$$

2 Primitives d'une fonction continue

2.1 Définition et propriétés

Définition 4 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et F une fonction dérivable sur cet intervalle.

On dit que F est UNE primitive de f sur I si $F' = f$.

Remarque : si la fonction f est continue sur I , alors ses primitives F sont de classe C^1 sur I .

■ **Exemple 4 :** Soit $f : x \mapsto 6x^2 + 4x + 3$ et $F : x \mapsto 2x^3 + 2x^2 + 3x - 7$. F est dérivable sur \mathbb{R} et on a bien, pour tout réel x , $F'(x) = f(x)$. F est une primitive de f sur \mathbb{R} .

Propriété 4 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I , F_1 et F_2 deux primitives de f sur I .

Alors $F_1 - F_2$ est constante : deux primitives d'une même fonction sur un intervalle diffèrent d'une constante.

Démonstration 2 : Soit F_1 et F_2 deux primitives de f sur I . $F_1 - F_2$ est dérivable sur I comme différence de fonctions dérivables sur I . De plus, pour tout réel x dans I

$$(F_1 - F_2)'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Ainsi, $F_1 - F_2$ est de dérivée nulle sur l'intervalle I , $F_1 - F_2$ est donc constante sur I . □

Propriété 5 : Soit I un intervalle, $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I .

Si f admet des primitives, alors il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

■ **Exemple 5 :** Pour tout réel x , on pose $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ et $F(x) = \ln(x^2 + 1)$.

F est une primitive de f sur \mathbb{R} . En effet, pour tout réel x , $F'(x) = f(x)$.

On cherche alors l'unique primitive F_0 de f qui vaut 5 en 1. Puisque toutes les primitives d'une fonction diffèrent seulement d'une constante, il existe un réel c tel que $F_0 = F + c$ et donc, pour tout réel x ,

$$F_0(x) = \ln(x^2 + 1) + c.$$

Puisque $F_0(1) = 5$, on a alors $\ln(1^2 + 1) + c = 5$, soit $c = 5 - \ln(2)$.

Pour tout réel x , on a donc

$$F_0(x) = \ln(x^2 + 1) + 5 - \ln(2) = \ln\left(\frac{x^2 + 1}{2}\right) + 5.$$

2.2 Primitives usuelles

Propriété 6 : Primitives usuelles

Fonction f	UNE Primitive F	Intervalle I
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}$	$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$	\mathbb{R}
$x \mapsto \frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$	$x \mapsto -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$] -\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0; +\infty[$
$x \mapsto e^{ax+b}, a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{e^{ax+b}}{a}$	\mathbb{R}
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto \ln(x)$	$] -\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$

Le conseil de la leçon : Une fois que vous avez déterminé une primitive, dérivez-la ! Vous devez obtenir la fonction de départ. Il est bien plus facile de dériver que de primitiver.

Propriété 7 : Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I , λ un réel, F une primitive de f et G une primitive de g . Alors,

- $F + G$ est une primitive de $f + g$;
- λF est une primitive de λf .

■ **Exemple 6 :** Une primitive de la fonction $f : x \mapsto e^{2x-1} + 5x^2 + \frac{3}{x^2}$ sur $I =]0; +\infty[$ est la fonction

$$F : x \mapsto \frac{e^{2x-1}}{2} + \frac{5}{3}x^3 - \frac{3}{x}.$$

Propriété 8 : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et g une fonction dérivable sur un intervalle J telle que pour tout réel $x \in J$, $g(x) \in I$.

$f \circ g$ est une primitive de $g' \times (f' \circ g)$ sur J .

Certaines "formes" de fonction sont à reconnaître pour en calculer les primitives.

Propriété 9 : Primitives quasi-usuelles : on considère une fonction u dérivable sur un intervalle I .

Fonction f	UNE Primitive F
$u' \times e^u$	e^u
u'/u	$\ln(u)$
$u' \times u$	$u^2/2$
$u'/2\sqrt{u}$	\sqrt{u}
$u'u^{\alpha-1}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$	u^α/α
$-u'/u^2$	$1/u$

■ **Exemple 7 :** Pour tout réel x , on pose $f(x) = (2x + 1)e^{x^2+x-2}$.

Posons, pour tout réel x , $u(x) = x^2 + x - 2$. On remarque alors que $f = u' \times e^u$

Une primitive de f est donc la fonction F définie pour tout réel x par $F(x) = e^{u(x)} = e^{x^2+x-2}$.

■ **Exemple 8 :** Pour tout réel x , on pose $f(x) = \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$. Posons, pour tout réel x , $u(x) = 1 + e^{2x}$.

Pour tout réel x , $u(x) > 0$. Par ailleurs, on remarque alors que pour tout réel x , $f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{u(x)}$.

Une primitive de f est donc la fonction F définie pour tout réel x , par $F(x) = \frac{1}{2} \ln(u(x)) = \frac{1}{2} \ln(1 + e^{2x})$.

■ **Exemple 9** : Pour tout réel $x > 0$, on pose $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.

Posons, pour tout réel $x > 0$, $u(x) = \ln(x)$. On remarque alors que $f = u' \times u$.

Une primitive de f est donc la fonction F définie pour tout réel $x > 0$ par $F(x) = \frac{(\ln(x))^2}{2}$.

Malheureusement, certaines fonctions n'admettent pas de primitive pouvant être exprimées à l'aide de fonctions usuelles : il s'agit là d'un théorème démontré par Liouville dans les années 1830. L'exemple le plus notable est la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$, très utilisée en probabilités...

3 Intégrale et primitives

3.1 Théorème fondamental

Théorème 3 : Soit f une fonction continue et positive sur $[a, b]$.

La fonction $F_a : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est LA primitive de f qui s'annule en a .

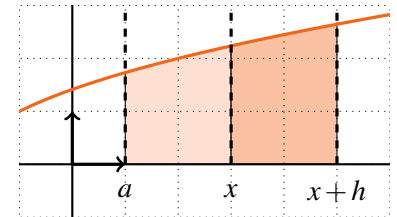
En particulier, toute fonction continue positive admet une primitive.

Démonstration 4 : On se contente de démontrer le cas où f est strictement croissante sur l'intervalle $[a, b]$.

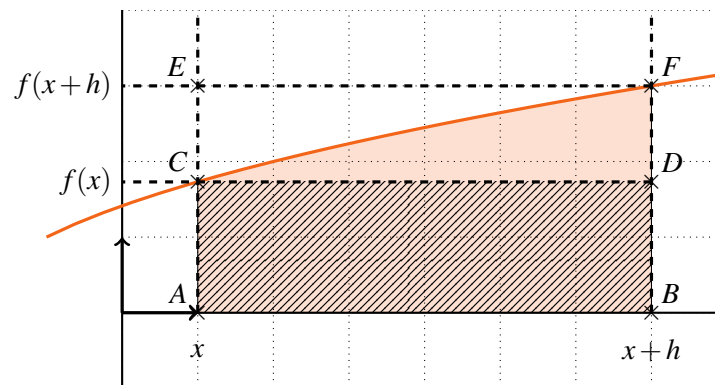
Soit $x \in [a, b]$ et h un réel strictement positif tel que $x + h \in [a, b]$.

$F_a(x+h) - F_a(x)$ représente l'aire sous la courbe de f entre a et $x+h$ à laquelle on retire l'aire sous la courbe de f entre a et x . C'est donc l'aire sous la courbe de f entre x et $x+h$.

Ainsi, $F_a(x+h) - F_a(x) = \int_x^{x+h} f(t) dt$.



On considère les points $A(x, 0)$, $B(x+h, 0)$, $C(x, f(x))$, $D(x+h, f(x))$, $E(x, f(x+h))$ et $F(x+h, f(x+h))$.



La fonction f étant strictement croissante, l'aire $\int_x^{x+h} f(t) dt$ est comprise entre l'aire du rectangle $ABDC$, qui vaut $h \times f(x)$ et l'aire du rectangle $ABFE$ qui vaut $h \times f(x+h)$.

Ainsi, $hf(x) \leq \int_x^{x+h} f(t) dt \leq hf(x+h)$. En divisant par h strictement positif, on a alors

$$f(x) \leq \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} \leq f(x+h).$$

Or, f est continue sur $[a, b]$. Ainsi, $\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = f(x)$.

D'après le théorème d'encadrement, $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h}$ existe et vaut $f(x)$.

On raisonne de la même manière pour $x \in]a; b]$ et $h < 0$. On a donc $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} = f(x)$.

La fonction F_a est dérivable en x et $F'_a(x) = f(x)$. Ce raisonnement vaut pour tout $x \in [a, b]$: F_a est une primitive de f sur $[a, b]$.

Par ailleurs, $F_a(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$. □

Définition 5 : Soit f une fonction continue et positive sur $[a, b]$ et F une primitive de f sur cet intervalle.

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

On note également $[F(x)]_a^b$.



Méthode 1 : Pour calculer l'intégrale d'une fonction sur un segment, on pourra...

- ... mentionner que la fonction intégrée est continue sur l'intervalle considéré pour en justifier son existence ;
- ... déterminer une primitive de la fonction à intégrer ;
- ... faire la différence des valeurs de la primitive aux bornes du segment donné

Démonstration 5 : On considère la fonction $F_a : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$. On rappelle que cette fonction est l'unique primitive de f sur $[a; b]$ qui s'annule en a .

Soit F une autre primitive de f sur $[a, b]$. Les primitives de f sur $[a, b]$ ne varient que par une constante, il existe un réel k tel que pour tout réel x , $F_a(x) = F(x) + k$.

Or, on sait que $F_a(a) = 0$. Il en vient que $F(a) + k = 0$ et donc $k = -F(a)$. Ainsi, pour tout réel $x \in [a; b]$,

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

En particulier, $F_a(b) = \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$. □

Cette quantité ne dépend donc pas de la primitive choisie !

■ **Exemple 10 :** On cherche à calculer $\int_1^5 x^2 dx$.

La fonction $x \mapsto x^2$ est bien continue et positive sur $[1; 5]$, l'intégrale ci-dessus est donc bien définie.

Une primitive de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $[1; 5]$ est la fonction $x \mapsto \frac{x^3}{3}$. Ainsi,

$$\int_1^5 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^5 = \frac{5^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{125}{3} - \frac{1}{3} = \frac{124}{3}.$$

3.2 Généralisation aux fonctions de signe quelconque

Définition 6 : Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et F une primitive de f sur cet intervalle. On définit l'intégrale de f sur $[a, b]$ par

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

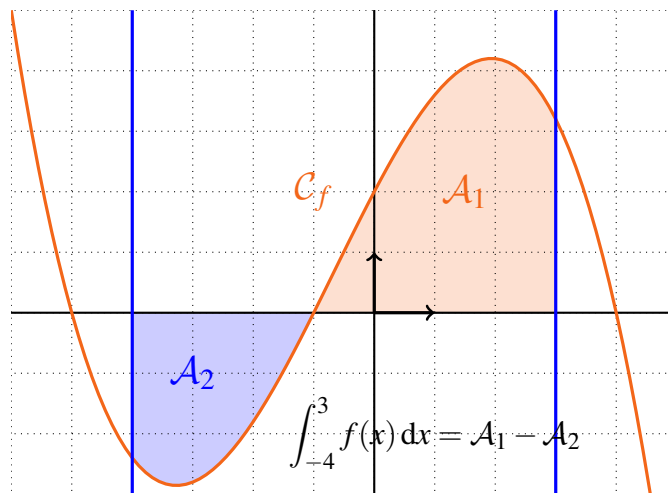
■ **Exemple 11 :** On cherche à calculer $\int_{-2}^1 x^3 dx$.

La fonction $x \mapsto x^3$ est continue sur $[-2; 1]$, l'intégrale ci-dessus est donc bien définie.

Une primitive de la fonction $x \mapsto x^3$ sur $[-2; 1]$ est la fonction $x \mapsto \frac{x^4}{4}$. Ainsi,

$$\int_{-2}^1 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_{-2}^1 = \frac{1^4}{4} - \frac{(-2)^4}{4} = \frac{1}{4} - \frac{16}{4} = -\frac{15}{4}.$$

La quantité ici est négative, il n'est pas possible de l'interpréter directement comme une aire. Il s'agit en réalité de la différence de l'aire entre la courbe et l'axe des abscisses lorsque la courbe est au-dessus de cet axe et de cette même aire lorsque la courbe est cette fois en-dessous de l'axe des abscisses.



3.3 Propriétés de l'intégrale

Linéarité et relation de Chasles

Propriété 10 : Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I . Soit a, b et c trois réels de l'intervalle I . Soit λ un réel.

- $\int_a^b (f + g)(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt$;
- $\int_a^b \lambda f(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt$;
- **(Relation de Chasles)** $\int_a^b f(t) dt + \int_b^c f(t) dt = \int_a^c f(t) dt$.

La relation de Chasles permet notamment de calculer la valeur d'intégrales de fonctions définies par morceaux.

■ **Exemple 12** : On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & , \text{ si } x < 0 \\ x^3 + 1 & , \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$.

La fonction f est continue sur $[-2; 3]$. En effet, le seul souci en éventuel se situe en 0.

Or, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0^2 + 1 = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0^3 + 1 = 1$ et $f(0) = 1$. Ainsi,

$$\int_{-2}^3 f(x) dx = \int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^3 f(x) dx = \int_{-2}^0 (x^2 + 1) dx + \int_0^3 (x^3 + 1) dx.$$

Or, une primitive de $x \mapsto x^2 + 1$ sur $[-2, 0]$ est $x \mapsto \frac{x^3}{3} + x$ et une primitive de $x \mapsto x^3 + 1$ sur $[0; 3]$ est $x \mapsto \frac{x^4}{4} + x$. Finalement,

$$\int_{-2}^3 f(t) dt = \left[\frac{x^3}{3} + x \right]_{-2}^0 + \left[\frac{x^4}{4} + x \right]_0^3 = \frac{14}{3} + \frac{93}{4} = \frac{335}{12}.$$

Positivité

Propriété 11 — Positivité : Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Soit a et b deux réels de I tels que $a \leq b$.

Si pour tout réel x dans $[a, b]$, $f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

Cette propriété est notamment utile pour vérifier ses résultats : si en intégrant une fonction positive, vous trouvez un résultat négatif, c'est assez mauvais signe.

Attention ici ! Il faut impérativement que a soit inférieur ou égal à b !

Croissance

Propriété 12 — Croissance : Soit f et g deux fonctions continues un intervalle I . Soit a et b deux réels de I tels que $a \leq b$.

Si pour tout réel $x \in [a, b]$, on a $f(x) \leq g(x)$, alors $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

Démonstration 6 : La fonction $g - f$ est continue et positive sur $[a, b]$.

Ainsi, d'après la propriété précédente, $\int_a^b (g - f)(x) dx \geq 0$.

Or, $\int_a^b (g - f)(x) dx = \int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx \geq 0$. On a donc $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$. \square

■ **Exemple 13** : Soit f une fonction continue sur $[-2; 5]$ telle que pour tout $x \in [-2; 5]$, $x \leq f(x) \leq 7$.

Ainsi, $\int_{-2}^5 x dx \leq \int_{-2}^5 f(x) dx \leq \int_{-2}^5 7 dx$.

Or, $\int_{-2}^5 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-2}^5 = \frac{21}{2}$ et $\int_{-2}^5 7 dx = [7x]_{-2}^5 = 49$. Ainsi, $\frac{21}{2} \leq \int_{-2}^5 f(x) dx \leq 49$.

■ **Exemple 14** : Pour tout entier naturel n , on pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $x \mapsto \frac{x^n}{1+x}$ est continue sur $[0; 1]$ comme quotient de fonctions continues sur cet intervalle dont le dénominateur ne s'annule pas. L'intégrale I_n est donc bien définie.

Soit $x \in [0; 1]$. On a alors $1 \leq 1+x \leq 2$. Par décroissance de la fonction inverse sur $[1; 2]$, il en vient que $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x} \leq 1$ et donc $0 \leq \frac{x^n}{1+x} \leq x^n$.

Cette inégalité étant vraie pour tout réel $x \in [0; 1]$, on a donc, par croissance de l'intégration que

$$\int_0^1 0 dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \leq \int_0^1 x^n dx$$

Or,

$$\int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi,

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \leq \frac{1}{n+1}.$$

On a par ailleurs que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$. D'après le théorème d'encadrement, on en conclut que (I_n) converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

Fonction positive d'intégrale nulle

Propriété 13 : Soit f une fonction continue et **positive** sur un intervalle I . Soit a et b deux réels de I tels que $a \leq b$.

Si $\int_a^b f(x) dx = 0$ alors, pour tout réel $x \in [a, b]$, $f(x) = 0$.

L'intégrale d'une fonction continue et positive sur un segment est nulle si et seulement si la fonction est identiquement nulle sur le segment.

L'idée de la démonstration est de raisonner par contraposée. Si f n'est pas identiquement nulle, alors par continuité de f , on peut trouver un intervalle inclus dans $[a, b]$ sur lequel f est strictement supérieur un réel strictement positif.

■ **Exemple 15** : Pour tout entier naturel n , on pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout réel x , on a $\frac{x^n}{1+x^n} \geq 0$ et donc, par positivité de l'intégrale $I_n \geq 0$.

Or, la fonction $x \mapsto \frac{x^n}{1+x^n}$ est continue et non identiquement nulle sur $[0, 1]$ (elle vaut $\frac{1}{2}$ en 1).

Ainsi, on a $I_n > 0$.

Inégalité triangulaire

Propriété 14 : Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Soit $a, b \in I$ tels que $a \leq b$. Alors,

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Démonstration 7 : Pour tout réel $x \in [a, b]$, on a $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$.

En intégrant cette inégalité entre a et b , on a alors $-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx$.

On obtient donc $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$. □

4 Fonction définie par une intégrale

L'étude d'une fonction définie par une intégrale fait intervenir le théorème fondamental de l'analyse. Il est important de maîtriser les méthodes ci-dessous.



Méthode 2 : Soit f une fonction continue sur un intervalle I .

Soit u et v deux fonctions de classes C^1 sur un intervalle J telles que $u(J) \subset I$ et $v(J) \subset I$.

Pour étudier la fonction $\varphi : x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt$ définie sur J ...

- puisque f est continue sur I , elle admet des primitives (de classe C^1) sur cet intervalle. On introduit F l'une d'entre elles.
- On a donc :

$$\forall x \in J, \varphi(x) = F(v(x)) - F(u(x)).$$

- Or,
 - ▶ u et v sont de classe C^1 sur J et à valeurs dans I ;
 - ▶ F est de classe C^1 sur I .
- φ est donc de classe C^1 sur J et

$$\forall x \in J, \varphi'(x) = v'(x)F'(v(x)) - u'(x)F'(u(x)) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x)).$$

■ **Exemple 16 :** On considère la fonction $\varphi : x \mapsto \int_0^{x^2} \sqrt{t} e^{-t^3} dt$.

Pour tout réel x , on a $x^2 \geq 0$ et donc $[0; x^2] \subset \mathbb{R}_+$. Or, la fonction $f : t \mapsto \sqrt{t} e^{-t^3}$ est continue sur \mathbb{R}_+ .

Ainsi, la fonction φ est bien définie sur \mathbb{R} .

Soit $x \in \mathbb{R}$. Notons alors F une primitive de f sur \mathbb{R}_+ . Pour tout réel x , on a alors $\varphi(x) = F(x^2) - F(0)$.

Or, la fonction $x \mapsto x^2$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R}_+ . De plus, la fonction F est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+ . Ainsi, la fonction φ est de classe C^1 sur \mathbb{R} . Pour tout réel x , on a alors

$$\varphi'(x) = 2x \times F'(x^2) = 2x f(x^2) = 2x \sqrt{x^2} e^{-(x^2)^3} = 2x|x| e^{-x^6}.$$

Ainsi, pour tout réel x , $\varphi'(x)$ est du signe de x . La fonction φ est donc décroissante sur \mathbb{R}_- puis croissante sur \mathbb{R}_+ .

■ **Exemple 17** : On considère la fonction $\varphi : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)^2}$, définie sur $]1; +\infty[$.

La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{\ln(t)^2}$ étant continue sur $]1; +\infty[$, la fonction φ est ainsi bien définie. Soit F une primitive de f sur $]1; +\infty[$. On a alors, pour tout réel $x \geq 1$,

$$\varphi(x) = F(x^2) - F(x)$$

Les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x$ sont de classe C^1 sur $]1; +\infty[$ et à valeurs dans $]1; +\infty[$. La fonction F est également de classe C^1 sur $]1; +\infty[$. La fonction φ est donc de classe C^1 sur $]1; +\infty[$ et, pour tout réel $x > 1$, on a

$$\varphi'(x) = 2xF'(x^2) - F'(x) = 2xf(x^2) - f(x) = \frac{2x}{\ln(x^2)^2} - \frac{1}{\ln(x)^2} = \frac{2x}{(2\ln(x))^2} - \frac{1}{\ln(x)^2}$$

Finalement, pour tout réel $x > 1$, on a

$$\varphi'(x) = \frac{x}{2\ln(x)^2} - \frac{1}{\ln(x)^2} = \frac{x-2}{2\ln(x)^2}.$$

Puisque pour tout réel $x > 1$, on a $\ln(x)^2 > 0$, $\varphi'(x)$ est du signe de $x - 2$.

φ est donc décroissante sur $]1; 2]$ et croissante sur $[2; +\infty[$.

5 Méthodes de calcul d'intégrales

5.1 Intégration par parties

Théorème 8 : Soit u et v deux fonctions de classe X^1 sur un intervalle I . Soit a et b deux réels de I . Alors

$$\int_a^b (uv')(x) dx = [uv]_a^b - \int_a^b (u'v)(x) dx.$$

Démonstration 9 : uv est dérivable sur $[a, b]$ comme produit de fonctions dérivables sur cet intervalle. D'après la formule de dérivée d'un produit, $(uv)' = u'v + uv'$, c'est-à-dire $uv' = (uv)' - u'v$. En intégrant cette égalité entre a et b , on obtient le résultat voulu. \square



Méthode 3 : L'intégration par parties peut-être utilisées lorsque l'on ne reconnaît pas "à vue" une primitive de la fonction intégrée.

Pour calculer une intégrale en procédant par parties ;

- On pose les fonctions u et v utilisées ;
- On justifie que les fonctions u et v sont de classes C^1 (souvent des fonctions usuelles) ;
- On écrit les fonction u' et v' obtenues. On vérifie alors que l'intégrale souhaitée est celle de uv' ou de $u'v$.
- On écrit alors la formule d'intégration par parties.

Il y a souvent plusieurs choix pour effectuer une intégration par parties, mais il ne faut pas oublier qu'il faut savoir primitiver l'une des fonctions utilisées.

■ **Exemple 18** : On souhaite calculer $\int_0^1 xe^{2x} dx$.

- Pour tout réel $x \in [0; 1]$, on pose $u(x) = x$.
 u est bien de classe C^1 sur $[0; 1]$ et, pour tout réel x , on a alors $u'(x) = 1$;
- Pour tout réel $x \in [0; 1]$, on pose $v(x) = \frac{e^{2x}}{2}$.
 v est bien de classe C^1 sur $[0; 1]$ et, pour tout réel x , on a alors $v'(x) = e^{2x}$.

On cherche alors à calculer $\int_0^1 (uv')(x) dx$. D'après la formule d'intégration par parties,

$$\int_0^1 (uv')(x) dx = [uv]_0^1 - \int_0^1 (u'v)(x) dx = \left[x \times \frac{e^{2x}}{2} \right]_0^1 - \int_0^1 1 \times \frac{e^{2x}}{2} dx.$$

Or, $\left[x \times \frac{e^{2x}}{2} \right]_0^1 = \frac{e^2}{2} - 0 = \frac{e^2}{2}$ et $\int_0^1 1 \times \frac{e^{2x}}{2} = \left[\frac{e^{2x}}{4} \right]_0^1 = \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}$. Ainsi,

$$\int_0^1 xe^{2x} dx = \frac{e^2}{2} - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4} \right) = \frac{e^2 + 1}{4}.$$

■ **Exemple 19** : Soit $x > 0$. On souhaite calculer $\int_1^x \ln(t) dt$.

- Pour tout réel $t \in [1; x]$, on pose $u(x) = \ln(x)$.
 u est bien de classe C^1 sur $[1; x]$ et, pour tout réel t , on a alors $u'(x) = \frac{1}{t}$;
- Pour tout réel $t \in [1; x]$, on pose $v(t) = t$.
 v est bien de classe C^1 sur $[1; x]$ et, pour tout réel t , on a alors $v'(t) = 1$.

On cherche alors à calculer $\int_1^x (uv')(t) dt$. D'après la formule d'intégration par parties,

$$\int_1^x (uv')(t) dt = [uv]_1^x - \int_1^x (u'v)(t) dt = [t \ln(t)]_1^x - \int_1^x t \times \frac{1}{t} dt.$$

Or, $[t \ln(t)]_1^x = x \ln(x) - 1 \ln(1) = x \ln(x)$ et $\int_1^x t \times \frac{1}{t} dt = \int_1^x 1 dt = [t]_1^x = x - 1$. Ainsi,

$$\int_1^x \ln(t) dt = x \ln(x) - x + 1$$



Méthode 4 : L'intégration par parties est notamment utilisées lorsque l'on souhaite établir une relation de récurrence entre les termes successifs d'une suite définie par une intégrale.

■ **Exemple 20** : Pour tout entier naturel n , on pose $I_n = \int_1^e \ln(x)^n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $x \mapsto \ln(x)^n$ est continue sur $[1; e]$. Ainsi, I_n est bien définie.

On a alors $I_{n+1} = \int_1^e \ln(x)^{n+1}$. On considère les fonctions u et v définie sur $[1; e]$ par $u : x \mapsto \ln(x)^{n+1}$ et

$v : x \mapsto x$. Les fonctions u et v sont bien de classe C^1 sur $[1, e]$ et, pour tout réel x dans cet intervalle, on a

$$u'(x) = \frac{1}{x} \times (n+1) \ln(x)^n \quad v'(x) = 1.$$

On cherche alors à calculer $I_{n+1} = \int_1^e (uv')(x) dx$. D'après la formule d'intégration par parties,

$$I_{n+1} = \int_1^e (uv')(x) dx = [uv]_1^e - \int_1^e (u'v)(x) dx = [x \times \ln(x)^{n+1}]_1^e - \int_1^e x \times \frac{1}{x} \times (n+1) \ln(x)^n dx.$$

Ainsi,

$$I_{n+1} = e \times \ln(e)^{n+1} - 1 \times \ln(1)^{n+1} - (n+1) \int_1^e \ln(x)^n dx = e - (n+1)I_n.$$

5.2 Changement de variables

Théorème 10 : Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Soit g une fonction de classe C^1 sur un segment $[a, b]$ tel que $g([a, b]) \subset I$. Alors

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt.$$



Méthode 5 : La plupart du temps, le changement de variable est donnée (mais il faut savoir faire des changements de variables affines de manière autonome).

Pour calculer $\int_a^b f(t) dt$ en utilisant un changement de variable.

1. Pour tout $t \in [a, b]$, on pose $x = g(t)$, en vérifiant que g est de classe C^1 sur $[a, b]$;
2. On adapte les bornes d'intégration : lorsque $t = a$, on a $x = g(a)$ et lorsque $t = b$, on a $x = g(b)$;
3. On a alors $dx = g'(t) dt$;
4. On exprime $f(t) dt$ uniquement en fonction de x et de dx ;
5. On applique alors la formule de changement de variables.

■ **Exemple 21 :** On pose $I = \int_0^1 t \sqrt{1-t^2} dt$.

Pour tout $t \in [0; 1]$, on pose $x = 1 - t^2$.

- La fonction $t \mapsto 1 - t^2$ est de classe C^1 sur $[0; 1]$;
- Lorsque $t = 0$, on a $x = 1 - 0^2 = 1$. Lorsque $t = 1$, on a $x = 1 - 1^2 = 0$.
- On a par ailleurs $dx = -2t dt$.
- Ainsi, pour $t \in [0; 1]$, on a

$$t \sqrt{1-t^2} dt = t \sqrt{x} \times \frac{dx}{-2t} = -\frac{1}{2} \sqrt{x} dx$$

Finalement, on a

$$I = \int_0^1 t \sqrt{1-t^2} dt = \int_1^0 \left(-\frac{1}{2} \sqrt{x} dx \right) = \frac{1}{2} \int_0^1 x^{1/2} dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^{3/2}}{3/2} \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$