

Intégration sur un segment

Calcul de primitives

► Exercice 1 – Voir le corrigé

Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur les intervalles donnés.

$$f_1 : x \mapsto x^5 + x^4 - x^3 + x - 1 \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$f_2 : x \mapsto \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} \text{ sur }]0; +\infty[.$$

$$f_3 : x \mapsto 7x^6 + 8e^{4x+2} - \frac{1}{x^3} \text{ sur }]-\infty; 0[$$

$$f_4 : x \mapsto e^{3x} + x^4 - \frac{1}{x} \text{ sur }]0; +\infty[$$

$$f_5 : x \mapsto (4x+1)e^{2x^2+x+3} \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$f_6 : x \mapsto \frac{2x+3}{x^2+3x+3} \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$f_7 : x \mapsto -\frac{2e^{2x}}{(3+e^{2x})^2} \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$f_8 : x \mapsto x^2 e^{x^3} \text{ sur } \mathbb{R}.$$

$$f_9 : x \mapsto \frac{4x+10}{x^2+5x+7} \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$f_{10} : x \mapsto \frac{x^2+1}{\sqrt{x^3+3x}} \text{ sur }]0; +\infty[$$

$$f_{11} : x \mapsto -\frac{e^{1/x}}{x^2} \text{ sur }]0; +\infty[$$

$$f_{12} : x \mapsto \frac{1}{x \ln(x)} \text{ sur }]1; +\infty[$$

$$f_{13} : x \mapsto \frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}} \text{ sur }]0; +\infty[$$

$$f_{14} : x \mapsto \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \text{ sur }]0; +\infty[$$

$$f_{15} : x \mapsto \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x} \text{ sur }]1; +\infty[$$

$$f_{16} : x \mapsto \frac{-2x-5}{x^4+10x^3+25x^2} \text{ sur }]0; +\infty[$$

► Exercice 2 – Voir le corrigé

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'unique primitive de la fonction donnée vérifiant la condition indiquée.

$$f_1 : x \mapsto 2x+1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ avec } F_1(3) = 2$$

$$f_2 : x \mapsto \frac{3}{x} + x \text{ sur }]-\infty; 0[\text{ avec } F_2(-1) = 2$$

$$f_3 : x \mapsto x^2 e^{x^3} \text{ avec } F(0) = 3$$

$$f_4 : x \mapsto \frac{2x}{1+x^2} \text{ avec } F(2) = 7$$

$$f_5 : x \mapsto \frac{8x+4}{2x^2+2x+1} \text{ avec } F(-1) = 3$$

$$f_6 : x \mapsto \frac{-3x}{(x^2+1)^2} \text{ avec } \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 2$$

► Exercice 3 – Voir le corrigé

Pour tout réel x différent de 1 et -3 , on pose $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x+3)}$.

1. Déterminer deux réels a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3; 1\}$, $f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3}$.
2. En déduire une primitive de f sur $]1; +\infty[$.

Intégrales et primitives

► Exercice 4 – Voir le corrigé

Calculer les intégrales suivantes.

$$\text{a. } \int_{-5}^7 \sqrt{2} dx$$

$$\text{b. } \int_3^{14} \frac{1}{x} dx$$

$$\text{c. } \int_{-2}^4 (x^2 + 3x + 4) dx$$

$$\text{d. } \int_0^{10} e^{-5x} dx$$

$$\text{e. } \int_{-3}^5 |x| dx$$

$$\text{f. } \int_1^9 \frac{3}{2\sqrt{x}} dx$$

$$\text{g. } \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$$

$$\text{h. } \int_3^7 \frac{1}{x^2} dx$$

$$\text{i. } \int_{-2}^4 2xe^{x^2} dx$$

$$\text{j. } \int_2^e \frac{1}{x \ln(x)} dx$$

$$\text{k. } \int_0^2 \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$$

$$\text{l. } \int_{-1}^4 \frac{x}{\sqrt{9+x^2}} dx$$

► Exercice 5 – Voir le corrigé

Pour tout réel $x > -1$, on pose $f(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$.

1. Montrer que pour tout réel $x > -1$, $f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}$.
2. En déduire une primitive de f sur $] -1; +\infty[$.
3. Calculer alors $\int_1^3 f(x) dx$.

► Exercice 6 – Voir le corrigé

On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & , \text{ si } x < -1 \\ 2x^3 - x + 1 & , \text{ si } x \geq -1 \end{cases}$.

Justifier que f est continue sur $[-4; 1]$ puis calculer $\int_{-4}^1 f(t) dt$.

Propriétés de l'intégrale

► Exercice 7 – Voir le corrigé

Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = \int_0^n e^{-x^2} dx$.

1. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
2. Montrer que pour tout réel $x \geq 0$, on a $-x^2 \leq -2x + 1$ et que $e^{-x^2} \leq e^{-2x+1}$.
3. En déduire que pour tout entier naturel n , $u_n \leq \frac{e}{2}$.
4. En déduire que la suite (u_n) converge. On ne cherchera pas à calculer sa limite.

► Exercice 8 – Voir le corrigé

Pour tout entier naturel n , on pose $I_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-t)^n e^t dt$.

1. Justifier que la suite (I_n) est bien définie.
2. Calculer I_0 .
3. Montrer que pour tout entier naturel n , on a $0 \leq I_n \leq \frac{e-1}{n!}$.
4. En déduire la limite de la suite (I_n) .

► **Exercice 9 – Voir le corrigé**

Soit $x \in [0; 1[$. Pour tout entier naturel n , on pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}$.

1. Soit $t \in [0; x]$. Rappeler la valeur de $\sum_{k=0}^{n-1} t^k$.
2. En déduire que pour tout entier naturel non nul n , on a $S_n(x) = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}$.
3. Montrer que pour tout $t \in [0, x]$, on a $0 \leq \frac{t^n}{1-t} \leq \frac{t^n}{1-x}$.
4. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n(x))$.

Fonction définie par une intégrale

► **Exercice 10 – Voir le corrigé**

On considère la fonction $g : x \mapsto \int_{-x}^x \frac{e^{-t}}{1+t^2}$.

1. Justifier que la fonction g est définie sur \mathbb{R} .
2. Démontrer que la fonction g est impaire.
3. Étudier le signe de $g(x)$ pour tout réel x .
4. Justifier que g est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+ et calculer sa dérivée.
5. En déduire les variations de g sur \mathbb{R} (les limites ne sont pas demandées).

► **Exercice 11 – Voir le corrigé**

On considère la fonction $f : x \mapsto \int_1^{x^2} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$.

1. Justifier que f est définie sur \mathbb{R}^* et montrer qu'elle est paire.
2. Construire le tableau de variations de f sur \mathbb{R}^* .

IPP et applications

► **Exercice 12 – Voir le corrigé**

A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_1^4 x \ln(x) dx$.

► **Exercice 13 – Voir le corrigé**

En utilisant deux intégrations par parties successives, déterminer $\int_0^1 x^2 e^x dx$.

► **Exercice 14 (Un extrait d'exercice que j'ai eu au bac...) – Voir le corrigé**

On note $I = \int_1^e \ln(x) dx$ et $J = \int_1^e (\ln(x))^2 dx$.

1. Vérifier que la fonction F définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $F(x) = x \ln(x) - x$ est une primitive de la fonction logarithme népérien sur cet intervalle.
2. En déduire la valeur de I .
3. À l'aide d'une intégration par parties, déterminer la valeur de J .

► Exercice 15 – Voir le corrigé

Pour tout entier naturel n , on définit l'intégrale I_n par

$$I_0 = \int_0^1 e^{1-x} dx \quad \text{et, si } n \geq 1, I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx.$$

1. Calculer la valeur exacte de I_0 .
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout entier naturel n , on a $I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n$.
3. En déduire les valeurs de I_1 et I_2 .

► Exercice 16 – Voir le corrigé

L'exercice est constitué de deux parties indépendantes.

Partie I

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on désigne par f_n la fonction définie sur $[0; 1]$ par $f_n(x) = x^n e^x$

On note C_n la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) du plan. On désigne par I_n la suite définie pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$.

1. (a) On désigne par F_1 la fonction définie sur $[0; 1]$ par $F_1(x) = (x-1)e^x$.
Vérifier que F_1 est une primitive de la fonction f_1 .
(b) Calculer I_1 .
2. À l'aide d'une intégration par parties, établir la relation, pour tout entier n supérieur ou égal à 1,
$$I_{n+1} = e - (n+1)I_n.$$

3. Calculer I_2 .
4. On considère la fonction **mystere** écrite dans le langage Python.

```

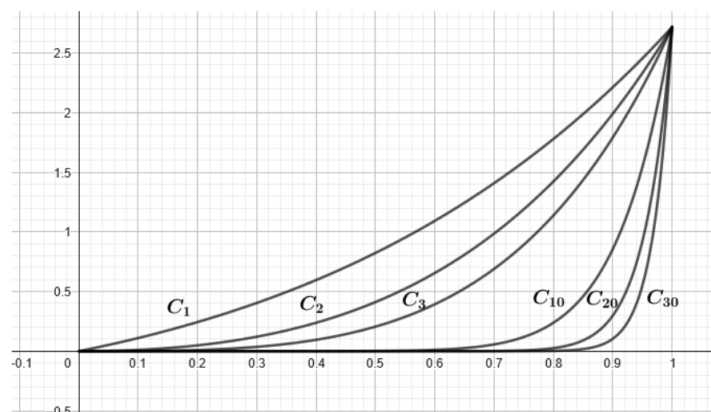
1 from math import e #la constante d'Euler e
2
3 def mystere(n):
4     a = 1
5     L = [a]
6     for i in range(1, n):
7         a = e - (i + 1) * a
8         L.append(a)
9     return L

```

À l'aide des questions précédentes, expliquer ce que renvoie l'appel **mystere(5)**.

Partie II

1. Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les courbes $C_1, C_2, C_3, C_{10}, C_{20}$ et C_{30} .



- (a) Donner une interprétation graphique de I_n .
 (b) Quelle conjecture peut-on émettre sur la limite de la suite (I_n) ?
2. Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $0 \leq I_n \leq e \int_0^1 x^n dx$.
3. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

Changement de variable

► Exercice 17 – Voir le corrigé

A l'aide du changement de variable indiqué, calculer les intégrales suivantes.

$$\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{t}} dt \text{ en posant } x = 1 + \sqrt{x}$$

$$\int_0^{\ln(2)} \frac{\ln(1+e^x)}{1+e^{-x}} dx \text{ en posant } t = 1 + e^x.$$

Annales de concours

► Exercice 18 esc 1998 – Voir le corrigé

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x) dx$.

- Montrer que la suite (I_n) est positive et décroissante. Que peut-on en déduire ?
- (a) Montrer que, pour tout entier naturel n et tout $x \in [0; 1]$, $x^n \ln(1+x) \leq x^n$.
 (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \leq \frac{1}{n+1}$.
 (c) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.
- (a) En effectuant une intégration par partie, montrer que pour tout entier naturel n , on a

$$I_n = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx.$$

- (b) Étudier la convergence de la suite (nI_n) .

► Exercice 19 EM Lyon 2002 – Voir le corrigé

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction polynomiale $P_n : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in [0; +\infty[$, par :

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k} = -x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{-x^{2n-1}}{2n-1} + \frac{x^{2n}}{2n}.$$

I. Étude des fonctions polynomiales P_n

- Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0; +\infty[$:

$$P'_n(x) = \frac{x^{2n} - 1}{x + 1}.$$

- Établir, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les variations de P_n sur $[0; +\infty[$ et dresser le tableau de variations de P_n .
- Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P_n(1) < 0$.
- (a) Vérifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0; +\infty[$:

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + x^{2n+1} \left(-\frac{1}{2n+1} + \frac{x}{2n+2} \right).$$

(b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P_n(2) \geq 0$.

5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $P_n(x) = 0$ d'inconnue $x \in [1; +\infty[$, admet une unique solution x_n , et que :

$$1 < x_n \leq 2.$$

6. Écrire un programme en langage Python qui calcule une valeur approchée de x_2 à 10^{-3} près.

II. Limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

7. Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0; +\infty[$:

$$P_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt.$$

8. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt = \int_0^1 \frac{1 - t^{2n}}{t + 1} dt.$$

9. Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [1; +\infty[$:

$$t^{2n} - 1 \geq n(t^2 - 1).$$

10. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt \geq \frac{n}{2}(x_n - 1)^2$$

puis

$$0 < x_n - 1 \leq \frac{\sqrt{2 \ln(2)}}{\sqrt{n}}.$$

11. Conclure quant à la convergence et à la limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

► Exercice 20 EDHEC 2002 – Voir le corrigé

On note f la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par :
$$\begin{cases} \forall x > 0, & f(x) = \frac{-x \ln(x)}{1 + x^2} \\ f(0) = 0 \end{cases}.$$

- (a) Vérifier que f est continue sur \mathbb{R}_+ .
(b) Étudier le signe de $f(x)$.
- Montrer que l'on définit bien une fonction F sur \mathbb{R}_+ , en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad F(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

3. Pour tout x de \mathbb{R}_+ , on pose $g(x) = F(x) - x$.

(a) Montrer que g est dérivable sur \mathbb{R}_+ et que, pour $x > 0$, on peut écrire $g'(x)$ sous la forme

$$g'(x) = \frac{-xh(x)}{1 + x^2}.$$

(b) Étudier les variations de h , puis en déduire son signe. On donne $\ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \approx -0,48$.

- (c) En déduire le signe de $g(x)$.
4. On définit la suite (u_n) par la donnée de son premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence, valable pour tout entier n de \mathbb{N} : $u_{n+1} = F(u_n)$.
- (a) Établir par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1]$.
- (b) Montrer, en utilisant le résultat de la troisième question, que (u_n) est décroissante.
- (c) En déduire que la suite (u_n) converge et donner $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

► Exercice 21 – Voir le corrigé

On considère la fonction f définie, pour tout $t \in \mathbb{R}$, par :

$$f(t) = \frac{2e^t}{\sqrt{1+t^2}}.$$

- Dresser le tableau de variations de f sur \mathbb{R} comprenant les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
- (a) Établir, pour tout $t \in [0; +\infty[$: $2e^t - t - t^2 > 0$ et $1+t \geq \sqrt{1+t^2}$.
- (b) En déduire :

$$\forall t \in [0; +\infty[, f(t) > t.$$

- On considère la suite réelle $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

- Établir que u_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.
 - Écrire un programme en Python qui calcule et affiche le plus petit entier n tel que $u_n > 10^6$.
- On considère la fonction $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$G(x) = \int_{-x}^x f(t) dt.$$

- Montrer que G est impaire.
- Montrer que G est de classe C^1 sur \mathbb{R} et calculer $G'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- Quelle est la limite de $G(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$?
- Étudier le sens de variation de G et dresser le tableau de variation de G comprenant les limites de G en $-\infty$ et $+\infty$.

► Exercice 22 EDHEC 2011 – Voir le corrigé

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}_+ par : $f(x) = \frac{2}{x^2} \int_0^x \frac{t}{e^t + 1} dt$ si $x > 0$ et $f(0) = \frac{1}{2}$.

- (a) Montrer que : $\forall x \in]0, +\infty[, \forall t \in [0, x], \frac{1}{e^x + 1} \leq \frac{1}{e^t + 1} \leq \frac{1}{2}$.
- (b) Établir alors que, pour tout réel x strictement positif, on a : $\frac{1}{e^x + 1} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$.
- (c) En déduire que la fonction f est continue en 0.
- (a) Montrer que f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ puis vérifier que, pour tout réel x strictement positif, on peut écrire : $f'(x) = -\frac{4}{x^3}g(x)$, où g est une fonction que l'on déterminera.
- (b) Étudier les variations, puis le signe de la fonction g . En déduire que f est décroissante sur \mathbb{R}_+ .
- (a) Montrer que, pour tout réel t positif, on a : $\frac{t}{e^t + 1} \leq 1$.
- (b) En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.