Variables aléatoires discrètes

Dans tout le chapitre $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé.

1 Variable aléatoire discrète

Définition 1 : On appelle variable aléatoire réelle toute fonction, en général notée X, définie sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \leqslant x\} \in \mathcal{A}.$$

Si l'ensemble des valeurs prise par X (c'est-à-dire $X(\Omega)$) est fini ou dénombrable, on dira que la variable aléatoire X est discrète.

De la même manière que pour les variables aléatoires finies, nous pouvons alors définir les événements suivants.

Définition 2 : Soit X une variable aléatoire réelle sur un univers Ω fini et a un réel.
On note $[X = a]$ l'événement qui regroupe toutes les issues ω de Ω telle que $X(\omega) = a$.

$$[X = a] = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) = a\}$$

On peut définir de la même manière les événements $[X < a]$, $[X \leqslant a]$, $[X \geqslant a]$, $[X \in I]$ pour $I \subset \mathcal{A}$...

La définition de variable aléatoire dans le cadre discret nous permet en effet de bien définir tous ces événements. Rappelons que l'ensemble des événements $\mathcal{A}$ est stable par intersection et union dénombrable ainsi que par passage au complémentaire.

- L'ensemble $[X > a]$ étant le complémentaire de $[X \leqslant a]$, c'est donc bien un événement ;
- L'ensemble $[X < a]$ peut s'exprimer comme l'union dénombrable des événements $\left[X \leqslant a - \frac{1}{n}\right]$;
- L'ensemble $[X \geqslant a]$ est le complémentaire de $[X < a]$
- L'ensemble $[X = a]$ est égal à l'intersection $[X \geqslant a] \cap [X \leqslant a]$...

▪ **Exemple 1 :** On lance un dé équilibré à six faces, numérotées de 1 à 6. On note X le nombre de lancers nécessaires pour obtenir pour la première fois le numéro 6.

X est une variable aléatoire de support $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

Nous pouvons donc de nouveau définir un système d'événements canonique associé à une variable aléatoire discrète.

Propriété 1 : Soit X une variable aléatoire discrète.

La famille $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements.

Ce système complet d'événements est utile pour appliquer la formule des probabilités totales.

2 Loi d'une variable aléatoire

2.1 Loi d'une variable aléatoire

Définition 3 : Soit X une variable aléatoire discrète. La loi de probabilité de X est la fonction qui, à chaque réel $x \in X(\Omega)$, associe la probabilité $\mathbb{P}([X=x])$.

Propriété 2 : Soit X une variable aléatoire discrète.
La série $\sum\limits_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X=x])$ converge et $\sum\limits_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X=x]) = 1$.

Démonstration 1 : Il suffit de noter que la famille $([X=x])_{x\in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements. □

Méthode 1 : Pour déterminer la loi d'une variable aléatoire finie X...

- On détermine l'ensemble $X(\Omega)$;
- On écrit chaque événement $[X=x]$ pour $x \in X(\Omega)$ en fonction d'événements plus simples ;
- On calcule $\mathbb{P}([X=x])$ pour $x \in X(\Omega)$.

▪ **Exemple 2 :** On lance un dé équilibré à six faces, numérotées de 1 à 6. On note X le nombre de lancers nécessaires pour obtenir pour la première fois le numéro 6.

X est une variable aléatoire de support $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

Pour tout entier naturel non nul k, on note S_k l'événement « le dé tombe sur 6 au k-ième lancer ».

Soit n un entier naturel non nul. On a alors $[X=n] = \bigcap_{k=1}^{n-1} \overline{S_k} \cap S_n$. Ainsi,

$$\mathbb{P}([X=n]) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} \overline{S_k} \cap S_n\right) \underbrace{=}_{indep.} \prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(\overline{S_k}) \times \mathbb{P}(S_n) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \times \frac{1}{6}.$$

Remarquons par ailleurs que l'on a $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{n} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{1-\frac{5}{6}} = 1.$

2.2 Fonction de répartition

Définition 4 : Soit X une variable aléatoire discrète.

La fonction de répartition de X est la fonction notée F_X définie par

$$F_X : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [0;1] \\ x & \longmapsto & \mathbb{P}([X \leqslant x]) \end{array} \right.$$

▪ **Exemple 3 :** On lance un dé équilibré à six faces, numérotées de 1 à 6. On note X le nombre de lancers nécessaires pour obtenir pour la première fois le numéro 6.

On a vu que pour tout entier naturel non nul n, on a $\mathbb{P}([X=n]) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \times \frac{1}{6}$.

Soit x un réel. On a alors

$$F_X(x) = \mathbb{P}([X \leqslant x]) = \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} \mathbb{P}([X = k]) = \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \times \frac{1}{6}.$$

Ainsi, en procédant en changement d'indice $j = k - 1$, on a

$$F_X(x) = \frac{1}{6} \times \sum_{j=0}^{\lfloor x \rfloor - 1} \left(\frac{5}{6}\right)^j = \frac{1}{6} \times \frac{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{\lfloor x \rfloor - 1 + 1}}{1 - \frac{5}{6}} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{\lfloor x \rfloor}.$$

Propriété 3 : Soit X une variable aléatoire discrète et F_X sa fonction de répartition. Alors,

- F_X est croissante sur $\mathbb{R}$;
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$;
- Pour tout $x \in X(\Omega)$, F_X est continue à droite en x et admet une limite finie à gauche en x.

On peut par ailleurs montrer que la limite à gauche de F_X en tout réel x est égal à $\mathbb{P}([X < x])$.

L'intérêt majeur de la fonction de répartition que vous retrouverez en long, en large et en travers l'an prochain, réside dans la propriété suivante.

Propriété 4 : Soit X et Y deux variables aléatoires finies.

Alors X et Y suivent la même loi si et seulement si $F_X = F_Y$.

2.3 Transformation de variable aléatoire

Propriété 5 : Soit X une variable aléatoire finie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Soit g une fonction définie sur $X(\Omega)$ à valeurs réelles. On définit la variable aléatoire $g(X)$ par

$$g(X) \ : \ \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto & g(X(\omega)) \end{array} \right.$$

Il s'agit également d'une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

3 Moments d'une variable aléatoire

3.1 Espérance d'une variable aléatoire réelle

Définition 5 : Soit X une variable aléatoire discrète.

La variable aléatoire X admet une espérance lorsque la série $\sum\limits_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}([X = x])$ **converge absolument**.

Dans ce cas, l'espérance de X, notée $E[X]$, est la valeur

$$E[X] = \sum_{x \in X(\Omega)} x \times \mathbb{P}([X = x])$$

Remarque : Si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et que la variable X admet une espérance, on a alors $E[X] = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} k\mathbb{P}([X = k])$.

Exemple 4 : On lance un dé équilibré à six faces, numérotées de 1 à 6. On note X le nombre de lancers nécessaires pour obtenir pour la première fois le numéro 6.

On a vu que pour tout entier naturel non nul n, on a $\mathbb{P}([X=n]) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \times \frac{1}{6}$.

La série $\sum_{n\geqslant 1} n\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \times \frac{1}{6}$ est une série géométrique dérivée convergente ($-1 < \frac{5}{6} < 1$). De plus, tous les termes de cette série étant positifs, elle est même absolument convergente. Ainsi, X admet une espérance et

$$E[X] = \sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{\left(1-\frac{5}{6}\right)^2} = 6.$$

Exemple 5 : On considère une urne qui contient initialement une boule blanche et une boule noire. On tire successivement une infinité de fois avec remise une boule dans l'urne. A chaque tirage, si la boule tirée est blanche, on ajoute toutefois une boule blanche dans l'urne.

Pour tout entier naturel non nul B_k, on note B_k l'événement « la k-ième boule tirée est blanche. On note X la variable aléatoire qui donne le rang de la première boule noire tirée.

On a alors $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Soit donc $n \in \mathbb{N}^*$.

On a $[X=n] = \bigcap_{k=1}^{n-1} B_k \cap \overline{B_n}$. Ainsi, $\mathbb{P}([X=n]) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} B_k \cap \overline{B_n}\right)$.

D'après la formule des probabilités composées, on a

$$\mathbb{P}([X=n]) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(B_2)\mathbb{P}_{B_1\cap B_2}(B_3)\ldots\mathbb{P}_{B_1\cap\cdots\cap B_{n-2}}(B_{n-1})\mathbb{P}_{B_1\cap\cdots\cap B_{n-1}}(\overline{B_n}).$$

- On a $\mathbb{P}(B_1) = \frac{1}{2}$;
- Si l'on pioche une boule blanche au premier tirage, on a alors 2 boules blanches sur 3 au total pour le deuxième tirage. Ainsi, $\mathbb{P}_{B_1}(B_2) = \frac{2}{3}$;
- Si l'on pioche une boule blanche au premier et au deuxième tirage, on a alors 3 boules blanches sur 4 au total pour le deuxième tirage. Ainsi, $\mathbb{P}_{B_1\cap B_2}(B_3) = \frac{3}{4}$;
- ...
- Si l'on pioche une boule blanche au tirages 1 à $n-2$, on a alors $n-1$ boules blanches sur n au total pour le tirage $n-1$. Ainsi, $\mathbb{P}_{B_1\cap\cdots\cap B_{n-2}}(B_{n-1}) = \frac{n-1}{n}$.
- Si l'on pioche une boule blanche au tirages 1 à $n-1$, on a alors 1 boule noire sur $n+1$ au total pour le tirage $n-1$. Ainsi, $\mathbb{P}_{B_1\cap\cdots\cap B_{n-1}}(\overline{B_n}) = \frac{1}{n+1}$.

Ainsi,

$$\mathbb{P}([X=n]) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$$

Or, pour tout entier naturel n, on a $n \times \mathbb{P}([X=n]) = \dfrac{1}{n+1}$. Il s'agit du terme général de la série harmonique qui est divergente. Ainsi, X n'admet pas d'espérance.

Propriété 6 : Soit m et M deux réels. Soit X une variable aléatoire telle que pour tout $x \in X(\Omega)$, on a $m \leqslant x \leqslant M$.

Alors on a $m \leqslant E[X] \leqslant M$.

Démonstration 2 : Soit $x \in X(\Omega)$. On a alors $m \leqslant x \leqslant M$. En multipliant cette inégalité par $\mathbb{P}([X = x])$ qui est positive, on obtient

$$m \times \mathbb{P}([X = x]) \leqslant x \times \mathbb{P}([X = x]) \leqslant M \times \mathbb{P}([X = x]).$$

Cette inégalité étant vraie pour tous les $x \in X(\Omega)$, on peut sommer sur toutes ces valeurs. On a donc

$$\sum_{x \in X(\Omega)} m\mathbb{P}([X = x]) \leqslant \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}([X = x]) \leqslant \sum_{x \in X(\Omega)} M\mathbb{P}([X = x])$$

soit

$$m \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X = x]) \leqslant \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}([X = x]) \leqslant M \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X = x])$$

Or, $\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X = x]) = 1$. Ainsi, on a bien

$$m \leqslant E[X] \leqslant M.$$

□

3.2 Formule de transfert

Théorème 3 — Formule de transfert : Soit X une variable aléatoire finie et g une fonction définie sur $X(\Omega)$. On a alors

$$E[g(X)] = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)\mathbb{P}([X = x]).$$

On peut donc calculer l'espérance de toute variable aléatoire obtenue à partir de X en connaissant uniquement la loi de X. On retiendra notamment les cas particuliers suivants.

Propriété 7 : Soit X une variable aléatoire finie. Alors

- Pour tous réels a et b,

$$E[aX + b] = aE[X] + b.$$

- On a

$$E(X^2) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^2\mathbb{P}([X = x]).$$

3.3 Moments d'ordre r

Définition 6 : Soit X une variable aléatoire discrète et $r \in \mathbb{N}^*$. Si la série $\sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}([X = x])$ converge absolument, on dit que X admet un moment d'ordre r, défini par

$$m_r(X) = E[X^r] = \sum_{x \in X(\Omega)} x^r\mathbb{P}([X = x])$$

Propriété 8 : Soit X une variable aléatoire discrète. Soit $r \in \mathbb{N}^*$.

Si X admet un moment d'ordre r, alors pour tout entier p tel que $p \leqslant r$, la variable X admet un moment d'ordre p.

4 Variance et écart-type d'une variable aléatoire discrète

4.1 Variance et écart-type

Définition 7 : Soit X une variable aléatoire discrète. Si X et $(X - E[X])^2$ admettent une espérance, alors la variable aléatoire X admet une variance et

$$V(X) = E[(X - E(X))^2]$$

Théorème 4 — Formule de König-Huygens : Soit X une variable aléatoire. On a alors

$$V(X) = E(X^2) - (E[X])^2.$$

En particulier, X admet une variance si et seulement si X admet un moment d'ordre 2.

Démonstration 5 : Supposons que X admette une espérance. On a alors $(X-E[X])^2 = X^2-2XE[X]+E[X]^2$. Ainsi, puisque $E[X]$ est une constante, on a, sous réserve de son existence :

$$\begin{aligned}
E[X^2 - 2XE[X] + E[X]^2] &= E(X^2) - E[2XE[X]] + E(X^2) \\
&= E(X^2) - 2E[X]E[X] + E(X^2) \\
&= E(X^2) - 2E[X]^2 + E[X]^2 \\
&= E(X^2) - E[X]^2.
\end{aligned}$$

Ainsi, $E[(X - E(X))^2]$ existe si et seulement si $E[X^2]$ et dans ce cas, on a $V(X) = E[X^2] - E[X]^2$. □

Remarque : la quantité $E(X^2)$ est naturellement calculée à l'aide de la formule de transfert.

Propriété 9 : Soit X une variable aléatoire finie. Alors $V(X) = 0$ si et seulement si il existe un réel a tel que $\mathbb{P}([X = a]) = 1$.

Définition 8 : Soit X une variable aléatoire réelle. On appelle écart-type de X, noté $\sigma(X)$ (sigma), la valeur

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

L'écart-type mesure la "variation moyenne" de la variable aléatoire autour de l'espérance.

Propriété 10 : Pour tous réels a et b, on a

$$V(aX + b) = a^2V(X) \qquad \sigma(aX + b) = |a|\sigma(X).$$

4.2 Variable aléatoire centrée réduite

Définition 9 : Soit X une variable aléatoire finie. On dit que X est centrée et réduite si $E[X] = 0$ et $V(X) = 1$.

Propriété 11 : Soit X une variable aléatoire finie non constante.

Alors la variable aléatoire X^* définie par $X^* = \dfrac{X - E[X]}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.

Démonstration 6 : Identique à celle sur les variables aléatoires finies. □

5 Lois discrètes usuelles

Il est évidemment nécessaire de se rappeler des lois usuelles finies : loi certaine, loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$, loi de Bernoulli, loi binomiale. On ajoute à ce panel les lois suivantes.

5.1 Loi géométrique de paramètre p

Définition 10 : Soit X une variable aléatoire discrète et $p \in]0;1[$.

On dit que X suit une loi géométrique de paramètre p si

- $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$;
- pour tout entier naturel non nul n, on a $\mathbb{P}([X = n]) = p(1-p)^{n-1}$

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

Démonstration 7 : On définit bien ainsi une loi de probabilité. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathbb{P}([X = n]) \geqslant 0$. De plus, pour $N \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}([X = n]) = \sum_{n=1}^{N} p(1-p)^{n-1} = p \sum_{n=0}^{N-1} (1-p)^n = p \times \frac{1-(1-p)^N}{1-(1-p)} = 1-(1-p)^N.$$

Or, puisque $0 < 1 - p < 1$, on en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \mathbb{P}([X = n])$ converge et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n]) = 1$. □

Propriété 12 : On considère un schema de Bernoulli (répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes) infini ayant une probabilité de succès p.

Soit X la variable aléatoire qui donne le rang du premier succès. Alors $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

Démonstration 8 : Pour tout entier naturel n, on note S_k l'événement : « l'épreuve k aboutit à un succès ». Alors, pour tout entier naturel non nul n, on a

$$[X = n] = \bigcap_{k=1}^{n-1} \overline{S_k} \cap S_n$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}([X = n]) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} \overline{S_k} \cap S_n\right) \underbrace{=}_{indep.} \prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(\overline{S_k}) \times \mathbb{P}(S_n) = p^{n-1} \times p.$$

□

■ **Exemple 6 :** On lance une pièce une infinité de fois jusqu'à obtenir PILE. On note X le rang d'apparition du premier PILE. X suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$.

Ainsi, pour tout entier naturel non nul n, on a $\mathbb{P}([X = n]) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Propriété 13 : Soit $p \in]0;1[$ et X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p. Alors X admet une espérance et une variance et

$$E[X] = \frac{1}{p} \qquad V(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Démonstration 9 : Soit $p \in]0;1[$ et X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p.

Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}*$, on a $n\mathbb{P}([X = n]) = np(1-p)^{n-1} = p \times n(1-p)^{n-1}$. Il s'agit du terme général d'une série géométrique dérivée de raison $1-p$. Or, $-1 < 1-p < 1$. La série $n\mathbb{P}([X = n])$ est donc convergente. De plus, tous les termes de cette série étant positifs, elle est absolument convergente. On a alors

$$E[X] = p\sum_{n=1}^{+\infty} n(1-p)^{n-1} = \frac{p}{(1-(1-p))^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

Par ailleurs, pour tout entier naturel non nul n, on a $n^2 = n(n-1)+n$. Ainsi,

$$n^2\mathbb{P}([X = n]) = n^2p(1-p)^{n-1} = pn(n-1)(1-p)^{n-1}+pn(1-p)^{n-1} = p(1-p)\times n(n-1)(1-p)^{n-2}+p\times n(1-p)^{n-1}.$$

Or, puisque $-1 < 1-p < 1$, la série de terme général $n(n-1)(1-p)^{n-2}$ converge (série géométrique dérivée seconde) et la série de terme général $n(1-p)^{n-1}$ converge également (série géométrique dérivée).

Ainsi, la série $\sum n^2\mathbb{P}([X = n])$ converge. Puisque tous ses termes sont positifs, cette série converge absolument. Ainsi, X admet un moment d'ordre 2 et

$$E[X^2] = p(1-p)\sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)(1-p)^{n-2}+p\sum_{n=1}^{+\infty} n(1-p)^{n-1} = p(1-p)\times\frac{2}{(1-(1-p))^3}+p\times\frac{1}{(1-(1-p))^2}$$

Ainsi,

$$E[X^2] = \frac{2-2p}{p^2} + \frac{p}{p^2} = \frac{2-p}{p^2}$$

et finalement, d'après la formule de Koenig-Huygens,

$$V(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{2-p}{p^2} - \left(\frac{1}{p}\right)^2 = \frac{1-p}{p^2}.$$

□

5.2 Loi de Poisson de paramètre λ

Définition 11 : Soit λ un réel strictement positif.

On dit que X suit une loi de Poisson de paramètre λ, ce que l'on note $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, si

- $X(\Omega) = \mathbb{N}$;
- Pour tout entier naturel n, $\mathbb{P}([X = n]) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$.

La loi de Poisson peut être utilisée pour modéliser l'apparition d'événements "rares". Vous verrez précisément en quoi l'an prochain.

Démonstration 10 : On définit bien ainsi une loi de probabilité. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathbb{P}([X=n]) \geqslant 0$.

Par ailleurs, la série de terme général $\dfrac{\lambda^n}{n!}$ converge. Ainsi,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X=n]) = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = \mathrm{e}^{-\lambda} \times \mathrm{e}^{\lambda} = 1.$$

□

Propriété 14 : Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ. On a alors

$$E[X] = \lambda \qquad V(X) = \lambda$$

Démonstration 11 : Pour tout entier naturel n, on a $n\mathbb{P}([X=n]) = n\mathrm{e}^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!}$. Si $n=0$, cette quantité vaut 0. Sinon, $n\mathbb{P}([X=n]) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda} \times \dfrac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}$.

Ainsi, la série de terme général $n\mathbb{P}([X=n])$ converge. Puisque tous ses termes sont positifs, elle converge absolument. Ainsi, X admet une espérance et

$$E(X) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda} \times \mathrm{e}^{\lambda} = \lambda.$$

Par ailleurs, pour tout entier naturel non nul n, on a $n^2 = n(n-1) + n$. Ainsi,

$$n^2\mathbb{P}([X=n]) = n(n-1)\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} + n\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$$

Si $n=0$ ou $n=1$, alors $n(n-1)\mathrm{e}^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!} = 0$. Sinon, $n(n-1)\mathrm{e}^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!} = \lambda^2\mathrm{e}^{-\lambda} \times \dfrac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!}$.

Ainsi, la série de terme général $n^2\mathbb{P}([X=n])$ converge. Puisque tous ses termes sont positifs, elle converge absolument : X admet donc un moment d'ordre 2. Par ailleurs,

$$E(X^2) = \sum_{n=2}^{+\infty} \lambda^2 \mathrm{e}^{-\lambda} \times \frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda} \times \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} = \mathrm{e}^{-\lambda}(\lambda^2\mathrm{e}^{\lambda} + \lambda\mathrm{e}^{\lambda}) = \lambda^2 - \lambda.$$

et finalement, d'après la formule de Koenig-Huygens,

$$V(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

□

5.3 Tableau récapitulatif

Ce tableau regroupe l'ensemble des lois discrètes étudiées dans ce chapitre, ainsi que leurs caractéristiques fondamentales à connaître parfaitement.

Nom & notation	**Support**	**Loi de probabilité**	**Espérance Variance**	**Contexte et utilisation**
Loi certaine égale à a ($a \in \mathbb{R}$)	$\{a\}$	$\mathbb{P}([X=a])=1$ $\mathbb{P}([X\neq a])=0$	$E(X)=a$ $V(X)=0$	Modélise une variable aléatoire constante (absence d'aléa).
Loi uniforme $\mathcal{U}(\llbracket 1,n\rrbracket)$ ($n\in\mathbb{N}^*$)	$\llbracket 1,n\rrbracket$	$\forall k\in\llbracket 1,n\rrbracket$, $\mathbb{P}([X=k])=\frac{1}{n}$	$E(X)=\frac{n+1}{2}$ $V(X)=\frac{n^2-1}{12}$	X prend de manière équiprobable toutes les valeurs entières de 1 à n.
Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ ($p\in]0,1[$)	$\{0,1\}$	$\mathbb{P}([X=1])=p$ $\mathbb{P}([X=0])=1-p$	$E(X)=p$ $V(X)=p(1-p)$	Épreuve à 2 issues (Succès/Échec). X vaut 1 en cas de succès, 0 sinon.
Loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ ($n\in\mathbb{N}^*$, $p\in]0,1[$)	$\llbracket 0,n\rrbracket$	$\forall k\in\llbracket 0,n\rrbracket$, $\mathbb{P}([X=k])=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	$E(X)=np$ $V(X)=np(1-p)$	Nombre de succès sur n répétitions indépendantes de la même épreuve de Bernoulli.
Loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ ($p\in]0,1[$)	$\mathbb{N}^*$	$\forall k\in\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([X=k])=p(1-p)^{k-1}$	$E(X)=\frac{1}{p}$ $V(X)=\frac{1-p}{p^2}$	Rang du premier succès lors d'une infinité d'épreuves de Bernoulli indépendantes.
Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ ($\lambda>0$)	$\mathbb{N}$	$\forall k\in\mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X=k])=\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$	$E(X)=\lambda$ $V(X)=\lambda$	Modélise le nombre d'apparitions d'un phénomène rare sur une période ou un espace donné.