

Variabes aléatoires discrètes

Variable aléatoire discrète

► Exercice 1

Soit c un réel positif. Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a

$$\mathbb{P}([X = n]) = \frac{c}{n(n+1)(n+2)}.$$

1. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout entier naturel n , on a

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n(n+1)} + \frac{b}{(n+1)(n+2)}.$$

2. En déduire la valeur du réel c .

3. Montrer que X admet une espérance et la calculer.

4. (a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n , on a $n^2 \mathbb{P}([X = n]) \geq \frac{2}{3n}$.
(b) La variable X admet-elle une variance ?

► Exercice 2

Soit p un réel strictement positif. Un commerçant estime que la demande d'un certain produit saisonnier est une variable aléatoire discrète X de support $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et telle que, pour tout entier naturel k , on a

$$\mathbb{P}([X = k]) = \frac{p^k}{(1+p)^{k+1}}.$$

Le réel p désigne alors le prix d'une campagne publicitaire de l'année précédente.

1. Vérifier que l'on définit bien ainsi une loi de probabilité.

2. Déterminer l'espérance de X .

3. On suppose que le commerçant dispose d'un certain stock $s \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la probabilité que le commerçant soit en rupture de stock en fonction de p et s .

► Exercice 3

On joue à pile ou Face avec une pièce non équilibrée. A chaque lancer, la probabilité d'obtenir PILE est $\frac{2}{3}$ et celle d'obtenir FACE est de $\frac{1}{3}$. Les lancers sont supposés indépendants et on note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir pour la première fois deux piles consécutifs.

Pour $n \geq 1$, on note p_n la probabilité $\mathbb{P}([X = n])$.

Pour tout entier $k \geq 1$, on note P_k (respectivement F_k) l'événement : « on obtient PILE (respectivement FACE) au k -ième lancer ».

1. Écrire un programme Python qui permet de simuler une réalisation de la variable X .

2. Exprimer les événements $[X = 2]$, $[X = 3]$ et $[X = 4]$ en fonction des événements P_k et F_k .

3. En déduire les valeurs de p_2 , p_3 et p_4 .

4. Justifier que $F_1, P_1 \cap F_2, P_1 \cap P_2$ est un système complet d'événements.

5. En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $p_{n+2} = \frac{1}{3}p_{n+1} + \frac{2}{9}p_n$.

6. En déduire la valeur de p_n .

7. Montrer que X admet une espérance et la calculer.

Lois usuelles

► Exercice 4

Pour chacune des situations indépendantes suivantes, identifier la loi de probabilité usuelle (finie ou discrète) suivie par la variable aléatoire X en justifiant brièvement (on précisera ses paramètres). Donner ensuite la valeur de son espérance $\mathbb{E}[X]$ et de sa variance $\mathbb{V}(X)$.

1. Un QCM comporte 20 questions indépendantes. Pour chaque question, 4 propositions sont faites dont une seule est exacte. Un étudiant répond totalement au hasard à toutes les questions. X est le nombre de réponses exactes obtenues.
2. Un recruteur fait passer des entretiens d'embauche. On estime que 10% des candidats correspondent au profil recherché. Les candidatures sont indépendantes. X est le nombre d'entretiens que le recruteur doit mener pour trouver le premier candidat idéal.
3. La roulette européenne d'un casino comporte 37 cases numérotées de 0 à 36. La bille s'arrête de manière équiprobable sur l'une d'elles. X est le numéro de la case gagnante.
4. Un visiteur clique sur une bannière publicitaire en ligne. La probabilité qu'il achète le produit mis en avant est de 0,05. La variable X prend la valeur 1 si le visiteur achète le produit, et 0 sinon.
5. Une machine produit des puces électroniques. Chaque puce a une probabilité $p = 0,02$ d'être défectueuse. Les défauts sont indépendants les uns des autres. Un technicien prélève au hasard un lot de 500 puces. X est le nombre de puces défectueuses dans ce lot.
6. Dans un jeu vidéo, un coffre a 5% de chance de contenir un objet « Légendaire » à chaque ouverture, indépendamment des ouvertures précédentes. Un joueur ouvre des coffres à la chaîne. X est le nombre de coffres qu'il doit ouvrir pour obtenir son premier objet Légendaire.
7. Une urne contient 3 boules rouges et 7 boules noires. On tire une boule au hasard. On pose $X = 1$ si la boule est rouge, et $X = 0$ si la boule est noire.
8. Un panel de 50 consommateurs est numéroté de 1 à 50. Un logiciel de sondage tire un numéro au hasard pour lui offrir un bon d'achat. X est le numéro du consommateur gagnant.
9. Une compagnie aérienne a vendu 150 billets pour un vol. La probabilité qu'un passager se présente à l'embarquement est de 0,90, indépendamment des autres passagers. X est le nombre de passagers qui se présentent à l'embarquement.
10. Un entrepôt logistique possède 8 quais de déchargement numérotés de 1 à 8. Lorsqu'un camion de livraison se présente, le système informatique de gestion lui affecte un quai de manière totalement aléatoire et équiprobable afin de lisser l'usure des installations. X est le numéro du quai affecté au camion.

► Exercice 5

Un cabinet d'audit financier est chargé de contrôler les notes de frais des cadres d'une grande entreprise. Historiquement, on estime que 4% des notes de frais présentent une anomalie (erreur de saisie ou fraude).

Un auditeur examine les notes de frais une par une. On suppose que le nombre de notes de frais est suffisamment grand pour que les contrôles puissent être assimilés à des tirages indépendants avec remise. On note X la variable aléatoire égale au nombre de notes de frais que l'auditeur doit contrôler pour découvrir la **première** anomalie.

1. Justifier la loi suivie par la variable aléatoire X et préciser l'ensemble de ses valeurs $X(\Omega)$.
2. Donner, pour tout entier $k \in X(\Omega)$, l'expression de $\mathbb{P}([X = k])$.
3. Donner la valeur de l'espérance $\mathbb{E}[X]$ et de la variance $\mathbb{V}(X)$. Interpréter concrètement la valeur de l'espérance pour l'auditeur.
4. Déterminer la probabilité que l'auditeur doive contrôler strictement plus de 10 dossiers avant de trouver la première anomalie.

► Exercice 6

Soit $p \in]0; 1[$, et $q = 1 - p$. On considère une variable aléatoire X suivant la loi géométrique de paramètre p .

1. Rappeler l'ensemble des valeurs prises par X ainsi que l'expression de $\mathbb{P}([X = k])$.
2. Pour tout entier naturel non nul n , justifier à l'aide d'une somme que $\mathbb{P}([X > n]) = q^n$.
3. On souhaite calculer la probabilité que X prenne une valeur paire.
 - (a) Justifier proprement que $\mathbb{P}(X \text{ est pair}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = 2k])$.
 - (b) Montrer que cette probabilité vaut $\frac{1-p}{2-p}$.

► Exercice 7

Dans une famille prise au hasard, le nombre d'enfants peut être modélisé par une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson de paramètre λ .

On suppose que les sexes des enfants sont équiprobables et qu'il y a indépendance des sexes des enfants au sein d'une même famille.

1. Sachant qu'une famille a n enfants, quelle est la probabilité que ce soit tous des garçons ?
2. Calculer la probabilité qu'une famille choisie au hasard ait au moins une fille.

► Exercice 8

Un casino propose le jeu suivant à ses clients. Le croupier lance une pièce de monnaie parfaitement équilibrée jusqu'à obtenir le côté « PILE ».

On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir PILE pour la première fois. A la fin de la partie, le casino verse au joueur un gain G (en euros égal à 2^X). Par exemple, si PILE apparaît au 3ème lancer, le joueur gagne 8 euros.

1. Reconnaître la loi de X . Préciser son espérance et sa variance.
2. La variable G admet-elle une espérance ?
3. Recopier et compléter le programme suivant qui simule une de ces parties et affiche le gain du joueur.

```
1 import numpy.random as rd
2 x = 1
3 while rd.randint(0,2) == 0:
4     x = ...
5 G = ...
6 print(G)
```

4. Dans la réalité, le casino ne possède pas des fonds infinis. Il décide de plafonner les gains. Si PILE n'est toujours pas apparu au bout de 10 lancers, le croupier arrête le jeu et verse le gain maximal autorisé. Si la participation à ce jeu est de 10 euros, le jeu est-il favorable au casino ou au joueur ?

► Exercice 9

On dit qu'une variable aléatoire est sans mémoire si elle est à valeurs dans \mathbb{N}^* et si, pour tous k et n dans \mathbb{N}^* , on a

$$\mathbb{P}_{[X>n]}(X > k + n) = \mathbb{P}([X > k]).$$

1. Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0; 1[$.
 - (a) Pour tout $m \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbb{P}(X > m)$.
 - (b) En déduire que X est sans mémoire.
2. Réciproquement, soit X une variable aléatoire sans mémoire. On pose $q = \mathbb{P}(X > 1)$.
 - (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathbb{P}(X > n) = q^n$.
 - (b) En déduire que X suit une loi géométrique de paramètre $p = 1 - q$.

► **Exercice 10 — Ecricome 2003**

Une entreprise de construction produit des objets sur deux chaînes de montage A et B qui fonctionnent indépendamment l'une de l'autre.

Pour une chaîne donnée, les fabrications des pièces sont indépendantes.

On suppose que A produit 60% des objets et B produit 40% des objets. La probabilité qu'un objet construit par la chaîne A soit défectueux est 0,1 alors que la probabilité pour qu'un objet construit par la chaîne B soit défectueux est 0,2.

1. On choisit au hasard un objet à la sortie de l'entreprise. On constate de cet objet est défectueux. Calculer la probabilité de l'événement « l'objet provient de la chaîne A ».
2. On suppose de plus que le nombre d'objets produits en une heure par A est une variable aléatoire Y qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 20$.

On considère la variable aléatoire X représentant le nombre d'objets défectueux produits par la chaîne A en une heure.

- (a) Rappeler la loi de Y ainsi que la valeur de l'espérance et de la variance de Y .
- (b) Soient k et n deux entiers naturels, déterminer la probabilité conditionnelle $P_{[Y=n]}(X = k)$. On distinguera les cas $k \leq n$ et $k > n$.
- (c) En déduire, en utilisant le système complet d'événements $([Y = i])_{i \in \mathbb{N}}$, que X suit une loi de Poisson de paramètre 2.

► **Exercice 11 — Approximation d'une loi Binomiale par une loi de Poisson**

On considère un réel $\lambda > 0$. Pour tout entier $n > \lambda$, on considère une variable aléatoire X_n suivant une loi binomiale de paramètres n et $p_n = \frac{\lambda}{n}$.

L'objectif de cet exercice est d'étudier le comportement de la probabilité $\mathbb{P}([X_n = k])$ lorsque n devient très grand, pour un entier $k \in \mathbb{N}$ fixé.

1. **Préliminaires**

- (a) Rappeler l'ensemble des valeurs prises par X_n , ainsi que l'espérance $\mathbb{E}[X_n]$.
- (b) Pour un entier $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, exprimer $\mathbb{P}([X_n = k])$ en fonction de n , k et λ .

2. **Étude du coefficient binomial**

Soit k un entier naturel fixé. On suppose $n \geq k$.

- (a) Démontrer que :

$$\frac{n!}{n^k(n-k)!} = 1 \times \left(1 - \frac{1}{n}\right) \times \left(1 - \frac{2}{n}\right) \times \dots \times \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

- (b) En déduire la limite de cette expression lorsque n tend vers $+\infty$.

3. **Étude de la puissance**

- (a) En utilisant la définition du nombre dérivé de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ en 0, déterminer la valeur de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.

- (b) On pose $u_n = n \ln \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\lambda$.

- (c) En déduire la limite de $\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

4. **Conclusion**

- (a) À l'aide des questions précédentes, démontrer que pour tout entier naturel k fixé :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}([X_n = k]) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

- (b) Comment interpréter ce résultat ?

Sujets de concours

► Exercice 12 — Ecricone 2024

Pour toute variable aléatoire discrète X à valeurs dans \mathbb{N}^* , et pour tout entier naturel k , on pose :

$$R_X(k) = P(X > k).$$

La partie II est indépendante des autres parties ; les résultats de la partie I pourront intervenir dans la partie III.

Partie I

- Soit p un réel de $]0, 1[$. Dans cette question uniquement, on suppose que X suit la loi géométrique de paramètre p .
 - Calculer $R_X(k)$ pour tout entier naturel k .
 - Vérifier que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{R_X(k)}{R_X(k-1)} = 1 - p$.
- Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans \mathbb{N}^* .
 - Pour tout entier naturel k non nul, exprimer $P(X = k)$ à l'aide de la fonction R_X .
 - En déduire que X et Y suivent la même loi si et seulement si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $R_X(k) = R_Y(k)$.

Partie II

- Déterminer deux réels a et b tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{n}{(n+1)!} = \frac{a}{n!} - \frac{b}{(n+1)!}$.
 - En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{(n+1)!}$ est convergente et déterminer la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!}$.
- Dans cette question, on considère une variable aléatoire X à valeurs dans \mathbb{N}^* telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X = n) = \frac{n}{(n+1)!}.$$

- Montrer que la variable aléatoire $X + 1$ admet une espérance et calculer $E(X + 1)$.
En déduire que X admet une espérance et calculer $E(X)$.
- Montrer que la variable aléatoire $(X - 1)(X + 1)$ admet une espérance et calculer $E((X - 1)(X + 1))$.
En déduire que X admet une variance et calculer $V(X)$.

Partie III

Soit $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement compris entre 0 et 1.

On étudie la durée de vie en années d'un appareil. Tout au long de l'année initiale $k = 0$, on suppose que l'appareil fonctionne. Puis, à l'issue de chaque année numéro k (k étant un entier naturel non nul), l'appareil possède une certaine probabilité de tomber en panne.

Plus précisément, on suppose que, pour tout entier naturel k non nul, si la machine fonctionne encore à l'issue de la $(k - 1)^{\text{e}}$ année, alors elle cesse de fonctionner à la fin de l'année k avec probabilité α_k , et elle continue à fonctionner après la fin de l'année k avec probabilité $1 - \alpha_k$.

On note X la variable aléatoire égale à la durée de vie en années de l'appareil.

- Justifier que, pour tout entier naturel k non nul : $R_X(k) = (1 - \alpha_k)R_X(k - 1)$.
- En déduire, pour tout entier naturel k non nul : $R_X(k) = \prod_{i=1}^k (1 - \alpha_i)$.
- En déduire, pour tout entier naturel k non nul, une expression de $P(X = k)$ en fonction des termes de la suite $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$. On pourra utiliser le résultat de la question 2a.
- Étude de deux exemples**
 - Dans cette question uniquement, on suppose que la suite $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est constante, c'est-à-dire : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \alpha_k = p$. Reconnaitre la loi de X .
 - Dans cette question uniquement, on suppose que, pour tout entier naturel k non nul, $\alpha_k = \frac{k}{k+1}$.
Déterminer la loi de X .

► **Exercice 13 — EDHEC 2005**

Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe d'origine O .

Au départ, le mobile est à l'origine.

Le mobile se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse k à l'instant n , alors, à l'instant $n + 1$ il sera sur le point d'abscisse $k + 1$ avec la probabilité p ($0 < p < 1$) ou sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité $1 - p$.

Pour tout n de \mathbb{N} , on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n et l'on a donc $X_0 = 0$.

On admet que, pour tout n de \mathbb{N} , X_n est définie sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .

Par ailleurs, on note T l'instant auquel le mobile se trouve pour la première fois à l'origine (sans compter son positionnement au départ).

Par exemple, si les abscisses successives du mobile après son départ sont $0, 0, 1, 2, 0, 0, 1$, alors on a $T = 1$. Si les abscisses successives sont : $1, 2, 3, 0, 0, 1$, alors on a $T = 4$.

On admet que T est une variable aléatoire définie sur (Ω, \mathcal{A}, P) .

1. (a) Pour tout k de \mathbb{N}^* , exprimer l'événement $[T = k]$ en fonction d'événements mettant en jeu certaines des variables X_i .
 (b) Donner la loi de X_i .
 (c) En déduire $P(T = k)$ pour tout k de \mathbb{N}^* , puis reconnaître la loi de T .
2. (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $X_n(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$.
 (b) Pour tout n de \mathbb{N}^* , utiliser le système complet d'événements $(X_{n-1} = k)_{0 \leq k \leq n-1}$ pour montrer que :
 $P(X_n = 0) = 1 - p$.
3. (a) Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \{1, 2, \dots, n+1\}, P(X_{n+1} = k) = pP(X_n = k-1)$.
 (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \{1, 2, \dots, n-1\}, P(X_n = k) = p^k(1-p)$.
 En déduire également la valeur de $P(X_n = n)$. Donner une explication probabiliste de ce dernier résultat.
 (c) Vérifier que $\sum_{k=0}^n P(X_n = k) = 1$.
4. Compléter la fonction suivante pour qu'elle simule l'expérience aléatoire étudiée et affiche la valeur prise par X_n pour des valeurs de n et p données en paramètres.

```

1 def edhec2005(n,p):
2     X = 0
3     for k in range(n):
4         alea = rd.random()
5         if alea < p:
6             X = -----
7         else:
8             X = -----
9     return X

```

5. (a) Montrer que : $\forall n \geq 2, \sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1} = \frac{(n-1)p^n - np^{n-1} + 1}{(1-p)^2}$.
 (b) En déduire que $E(X_n) = \frac{p(1-p^n)}{1-p}$.
6. (a) Montrer, en utilisant la question 3a, que : $\forall n \in \mathbb{N}, E(X_{n+1}^2) = p(E(X_n^2) + 2E(X_n) + 1)$.
 (b) Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = E(X_n^2) + (2n-1)\frac{p^{n+1}}{1-p}$.
 Montrer que $u_{n+1} = pu_n + \frac{p(1-p)}{1-p}$.
 (c) En déduire l'expression de u_n , puis celle de $E(X_n^2)$ en fonction de p et n .
 (d) Montrer que $V(X_n) = \frac{P}{(1-p)^2}(1 - (2n+1)p^n(1-p) - p^{2n+1})$.

► **Exercice 14 — Ecricome 2012**

Soit n un entier naturel non nul. Une entreprise dispose d'un lot de n feuilles originales qu'elle a numérotées $1, 2, \dots, n$. Elle photocopie ces n feuilles originales et souhaite que chaque original soit agrafé avec sa copie. Cependant, suite à un défaut informatique, la photocopieuse a mélangé les originaux et les copies. L'entreprise décide donc de placer les n originaux et les n copies dans une boîte. Une personne est alors chargée du travail suivant : elle pioche simultanément et au hasard 2 feuilles dans la boîte. S'il s'agit d'un original et de sa copie, elle les agrafe et les sort de la boîte. Sinon, elle repose les deux feuilles dans la boîte et elle recommence.

On modélise l'expérience par un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) . Soit T_n la variable aléatoire égale au nombre de pioches qui sont nécessaires pour vider la boîte lorsque celle-ci contient n originaux et n copies (soit $2n$ feuilles).

On considère l'événement A_n : « à l'issue de la première pioche, les deux feuilles piochées ne sont pas agrafées » et a_n sa probabilité, c'est-à-dire que $a_n = P(A_n)$.

1. Calculer a_n .
2. **Étude de T_2** On suppose dans cette question que $n = 2$, c'est-à-dire que la boîte contient deux originaux et deux copies.
 - (a) Montrer que pour tout entier $k \geq 2$: $P(T_2 = k) = (1 - a_2)(a_2)^{k-2}$.
 - (b) Justifier que la variable $S_2 = T_2 - 1$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre. En déduire l'espérance et la variance de T_2 en fonction de a_2 .
3. **Étude de T_3** On suppose dans cette question que $n = 3$, c'est-à-dire que la boîte contient trois originaux et trois copies.
 - (a) Calculer $P(T_3 = 2)$ puis $P(T_3 = 3)$ en fonction de a_2 et a_3 .
 - (b) À l'aide du système complet d'événements $(A_3, \overline{A_3})$ démontrer pour tout $k \geq 2$ que :

$$P(T_3 = k + 1) = (1 - a_3)P(T_2 = k) + a_3P(T_3 = k).$$

- (c) Montrer que :

$$\forall k \geq 2, \quad P(T_3 = k) = \frac{(1 - a_2)(1 - a_3)}{a_3 - a_2} \left((a_3)^{k-2} - (a_2)^{k-2} \right).$$

- (d) Calculer $\sum_{k=2}^{+\infty} P(T_3 = k)$.
- (e) Prouver que la variable aléatoire $T_3 - 1$ admet une espérance et calculer $E(T_3 - 1)$.
Donner la valeur de $E(T_3)$ en fonction de a_2 et a_3 .
- (f) Établir que la variable aléatoire $T_3(T_3 - 1)$ admet une espérance et donner sa valeur en fonction de a_2 et a_3 .
En déduire que T_3 admet une variance.