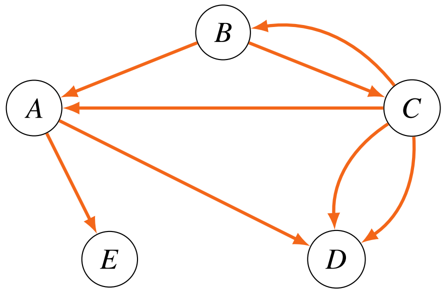
Exercices : Graphes

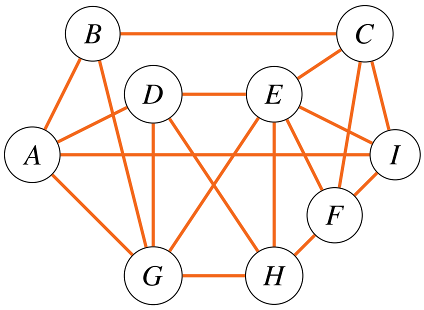
1 Vocabulaire et première propriétés

▸ Exercice 1



Soit $\mathcal{G} = (\mathcal{S}, \mathcal{A})$ un graphe orienté dont une représentation est donnée ci-contre.

1. Pour chaque sommet, donner le degré entrant, le degré sortant, et le degré.
2. Vérifier que la somme des degrés est bien égale à 2 fois le nombre d'arêtes.



▸ Exercice 2

On considère le graphe ci-contre

1. Quel est l'ordre de ce graphe ?
2. Ce graphe est-il simple ? Est-il complet ?
3. Déterminer le degré de chaque sommet.
4. Sans les compter directement, déterminer le nombre d'arêtes de ce graphe.

▸ Exercice 3

Construire un graphe orienté d'ordre 5 dont les degrés des sommets sont 3, 3, 2, 1 et 1.

▸ Exercice 4

Construire un graphe non orienté d'ordre 6 dont tous les sommets sont de degré 3.

▸ Exercice 5

Soit $\mathcal{G}$ un graphe simple non orienté d'ordre $n \geqslant 2$.

1. Montrer qu'il existe deux sommets de même degré.
2. Montrer que le nombre de sommets de degré impairs est pair.

▸ Exercice 6

Soit $\mathcal{G}$ un graphe simple non orienté d'ordre $n \geqslant 2$. On dit que $\mathcal{G}$ est d-régulier si tous les sommets de ce graphe sont de degré d Montrer que si $\mathcal{G}$ est d-régulier, alors n ou d est pair.

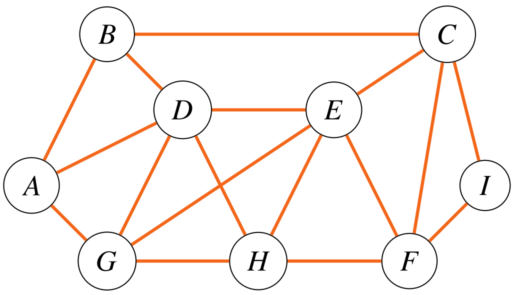
▸ Exercice 7

On considère un cube $ABCDEFGH$. A partir de de cube, on construit un graphe $\mathcal{G}$ dont les sommets correspondent aux sommets du cube et où deux sommets sont reliés par une arête si et seulement si les deux sommets correspondant sur le cube sont sur la même arête.

▸ Exercice 8

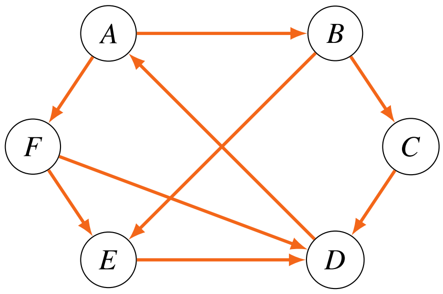
Dans un polygone, une diagonale est un segment reliant deux sommets non reliés par une arête. Déterminer le nombre de diagonales d'un polygone régulier à n sommets.

2 Parcours dans un graphe

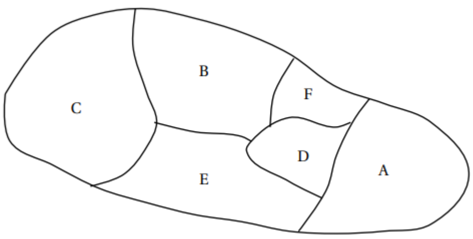


▸ Exercice 9
On considère le graphe ci-contre
1. Donner un chemin de ce graphe reliant A à I
2. Donner un chemin de longueur 5 reliant D à E.
3. Donner un cycle de longueur 7 de ce graphe.
4. Ce graphe est-il eulérien ? semi-eulérien ?

▸ Exercice 10
Soit $\mathcal{G} = (\mathcal{S}, \mathcal{A})$ un graphe orienté dont une représentation est donnée ci-contre.
1. Donner un chemin reliant A à D de longueur 2, de longueur 3 puis de longueur 6
2. Donner trois cycles de ce graphe.



▸ Exercice 11
Donner un cycle eulérien du graphe complet non orienté d'ordre 5 (on notera A, B, C, D et E ses sommets).



▸ Exercice 12 — Bac ES – Asie 2007
Une île imaginaire dont la carte est représentée ci-contre ; est composée de six provinces, notées A, B, C, D, E et F.
On s'intéresse aux frontières séparant ces provinces. On traduit cette situation par un graphe dont les sommets sont les provinces et où chaque arête représente une frontière entre deux provinces.

1. Représenter ce graphe. Est-il connexe ? Est-il simple ?
2. Donner l'ordre du graphe ainsi que le degré de chaque sommet.
3. Peut-on visiter cette île en franchissant une et une seule fois chacune des dix frontières ? Justifier. Si oui, proposer un parcours possible.

▸ Exercice 13
Soit $\mathcal{G}$ un graphe simple non orienté d'ordre $2p$. On suppose que tous les sommets de $\mathcal{G}$ sont de degré p au moins. Montrer par l'absurde que $\mathcal{G}$ est connexe.

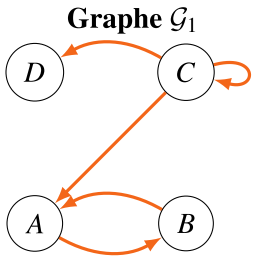
▸ Exercice 14
Soit $\mathcal{G}$ un graphe simple non orienté d'ordre $n \geqslant 2$.

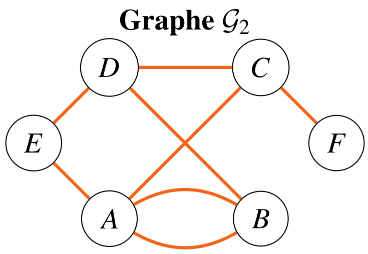
1. On suppose que $\mathcal{G}$ est connexe et contient un sommet de degré 1, noté X. On considère $\mathcal{G}'$ le graphe dont les sommets sont les mêmes que ceux de $\mathcal{G}$, excepté X, et dont les arêtes sont les mêmes que celles de $\mathcal{G}$, excepté l'unique arête menant à X. Montrer que $\mathcal{G}$ est connexe.
2. En déduire que si un graphe est connexe, alors $\mathcal{G}$ comporte au moins $n - 1$ arêtes.

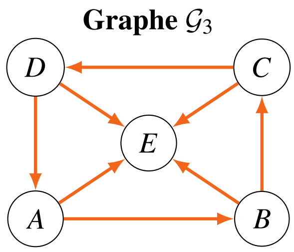
3 Matrice d'adjacence

► Exercice 15

Donner la matrice d'adjacence des graphes suivants.







► Exercice 16

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Construire un graphe non orienté dont M est la matrice d'adjacence.
2. Le graphe obtenu est-il connexe ?
3. Donner le degré de chaque sommet
4. Comment connaître le degré de chaque sommet en utilisant simplement la matrice d'adjacence ?

► Exercice 17

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Soit $\mathcal{G}$ un graphe dont la matrice d'adjacence est M. Sans dessiner le graphe, déterminer...

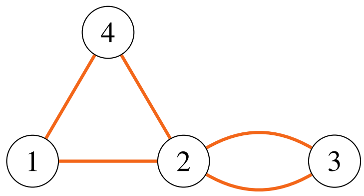
- ... l'ordre du graphe
- ... le nombre d'arêtes du graphe
- ... si le graphe est simple.

► Exercice 18

Construire la matrice d'adjacence du graphe complet non orienté d'ordre 5.

► Exercice 19

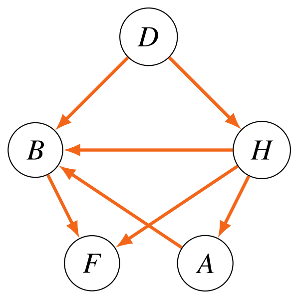
Dans le film *Will Hunting*, le héros interprété par Matt Damon est concierge dans une université et se retrouve confronté à un problème de théorie des graphes laissé au tableau par un professeur. Voici une partie de ce problème : on considère le graphe suivant.



1. Construire la matrice d'adjacence de ce graphe
2. Trouver la matrice donnant le nombre de chemins de longueur 3

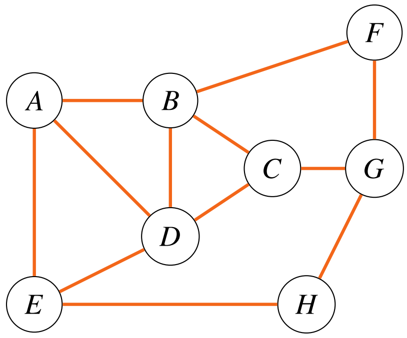
► Exercice 20

Un parcours sportif est composé d'un banc pour abdominaux, de haies et d'anneaux. Le graphe orienté ci-dessous indique les différents parcours conseillés partant de D et terminant à F. Les sommets sont : D (départ), B (banc pour abdominaux), H (haies), A (anneaux) et F (fin du parcours). Les arcs représentent les différents sentiers reliant les sommets.



1. Est-il possible de suivre un parcours en passant par toutes les étapes ?
2. Construire la matrice d'adjacence de ce graphe.

► Exercice 21 — BAC ES - Centres étrangers 2016



Une compagnie aérienne utilise huit aéroports que l'on nomme A, B, C, D, E, F, G et H. Entre certains de ces aéroports, la compagnie propose des vols dans les deux sens. Cette situation est représentée par le graphe Γ ci-contre, dans lequel :

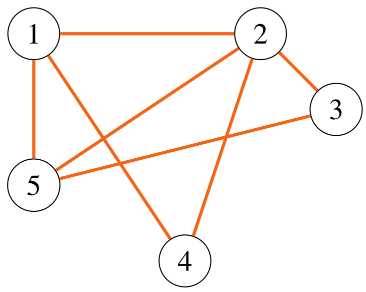
- les sommets représentent les aéroports,
- les arêtes représentent les liaisons assurées dans les deux sens par la compagnie.

1. Déterminer, en le justifiant, si le graphe Γ est complet.
2. Déterminer, en le justifiant, si le graphe Γ est connexe.
3. Déterminer si le graphe Γ admet une chaîne eulérienne. Si oui, donner une telle chaîne.
4. Donner la matrice d'adjacence M du graphe Γ en respectant l'ordre alphabétique des sommets.
5. Pour la suite de l'exercice, on donne les matrices suivantes :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 3 & 7 & 6 & 1 & 4 & 1 \\ 8 & 4 & 8 & 8 & 3 & 6 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & 2 & 7 & 4 & 1 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 7 & 6 & 7 & 3 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 4 & 7 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 1 & 3 & 3 & 0 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & 6 & 3 & 1 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 4 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

   Un voyageur souhaite aller de l'aéroport B à l'aéroport H.
   (a) Déterminer le nombre minimal de vols qu'il doit prendre, Justifier les réponses à l'aide des matrices données ci-dessus.
   (b) Donner tous les trajets possibles empruntant trois vols successifs.

► Exercice 22 — Bac ES - Nouvelle-Calédonie 2014



Un parc de loisirs propose à ses visiteurs des parcours d'accrobranches. Les différents parcours sont modélisés par le graphe Γ ci-contre où les sommets correspondent aux cinq arbres marquant leurs extrémités. Chaque parcours est représenté par une arête du graphe et peut être réalisé dans les deux sens.

1. L'organisateur du parc de loisirs souhaite que les visiteurs puissent, s'ils le souhaitent, réaliser un itinéraire complet d'accrobranches, c'est-à-dire un itinéraire empruntant une fois et une seule chaque parcours et en commençant cet itinéraire par l'arbre numéro 1.
   Justifier que ce souhait est réalisable et proposer un tel itinéraire.
2. On note M la matrice associée au graphe Γ en considérant les sommets pris dans l'ordre croissant des numéros d'arbres.
   (a) Écrire la matrice M puis calculer M^2 et M^3.
   (b) L'organisateur du parc de loisir souhaite organiser des « itinéraires express » qui débuteront à l'arbre numéro 1, emprunteront trois parcours d'accrobranches et finiront à l'arbre 4. Ces itinéraires peuvent éventuellement emprunter plusieurs fois le même parcours.
   Déterminer, en justifiant votre résultat, le nombre « d'itinéraires express » réalisables.
   (c) Donner la liste de ces itinéraires.

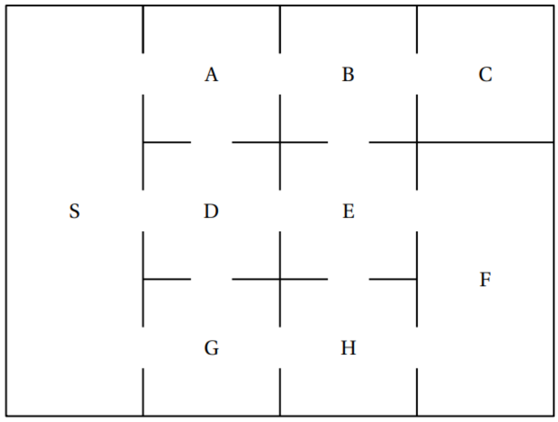
► **Exercice 23**

Un musée est constitué de 9 salles notées A, B, C, D, E, F, G, H et S.

Le plan du musée est représenté ci-contre.

Ainsi, un visiteur qui se trouve dans la salle S peut atteindre directement les salles A, D ou G.

S'il se trouve dans la salle C, il peut se rendre directement dans la salle B, mais pas dans la salle F.



On s'intéresse au parcours d'un visiteur dans ce musée. On ne se préoccupe pas de la manière dont le visiteur accède au musée ni comment il en sort. Cette situation peut être modélisée par un graphe, les sommets étant les noms des salles, les arêtes représentant les portes de communication.

1. Dessiner un graphe modélisant la situation décrite.
2. Est-il possible de visiter le musée, en empruntant chaque porte une fois et une seule ? Justifier.
3. On ferme les portes situées entre les salles A et B et entre les salles G et H. Quel parcours permettrait de visiter le musée en empruntant chaque porte une fois et une seule ?

On note M la matrice d'adjacence associée au graphe précédent, sans porte fermée, en convenant de l'ordre suivant des salles : S, A, B, C, D, E, F, G, H.

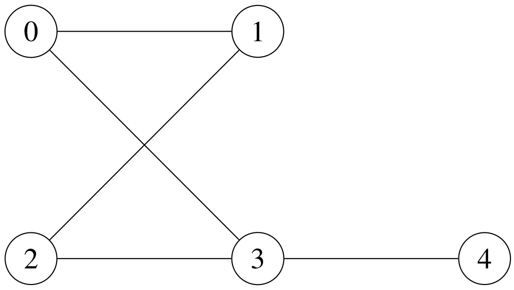
4. On donne la matrice

$$M^4 = \begin{pmatrix} 18 & 12 & 11 & 2 & 20 & 12 & 6 & 12 & 12 \\ 12 & 20 & 3 & 6 & 11 & 20 & 5 & 18 & 5 \\ 11 & 3 & 16 & 0 & 19 & 3 & 8 & 4 & 12 \\ 2 & 6 & 0 & 3 & 1 & 7 & 1 & 4 & 1 \\ 20 & 11 & 19 & 1 & 31 & 9 & 11 & 12 & 19 \\ 12 & 20 & 3 & 7 & 9 & 28 & 9 & 20 & 9 \\ 6 & 5 & 8 & 1 & 11 & 9 & 9 & 8 & 9 \\ 12 & a & 4 & 4 & 12 & 20 & 8 & 20 & 6 \\ 12 & 5 & 12 & 1 & 19 & 9 & 9 & 6 & 17 \end{pmatrix}$$

   (a) Déterminer la valeur de l'entier a manquant dans cette matrice.
   (b) Combien y-a-t-il de chemins qui en 4 étapes, partent de S et finissent à C ? Les citer.
   (c) Est-il toujours possible de joindre en 4 étapes deux salles quelconques ? Justifier.

▸ Exercice 24 — EDHEC 2023

On considère le graphe G suivant et on note A la matrice d'adjacence de G.



1. Déterminer la matrice A en expliquant sa construction.
2. (a) Par lecture du graphe, donner (en listant leurs sommets) les chaînes de longueur 3 reliant les sommets 2 et 3. Combien y en a-t-il ?

   (b) On considère la fonction Python suivante :

```python
def f(M,k):
    N = al.matrix_power(M,k)
    return N
```

   On suppose que l'on a saisi la matrice A et on considère les instructions :

```python
B = f(A,---)
n = B[---]
print(n)
```

   Compléter ces instructions pour qu'elles permettent l'affichage du nombre trouvé à la question 2a.

▸ Exercice 25 — EM Lyon 2025

Soit $n \geq 1$, on considère un graphe non orienté G donné par sa matrice d'adjacence $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\mathscr{S} = \{s_0, \dots, s_{n-1}\}$ l'ensemble des sommets de G, dans les programmes informatiques on confondra un sommet s_i avec son numéro i. On dit que deux sommets sont *voisins* s'ils sont distincts et reliés par une arête.

Une *coloration* de G est une application $c : \mathscr{S} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que $c(s_i) \neq c(s_j)$ si les sommets s_i et s_j sont voisins. Dans cette définition, $\mathbb{N}$ représente l'ensemble des « couleurs » disponibles, la coloration c attribue à chaque sommet une « couleur » de sorte que deux sommets voisins soient de « couleurs » différentes.

Le graphe G admet la *coloration triviale* donnée par $c(s_i) = i$ pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, il peut cependant admettre une coloration nécessitant moins de n « couleurs ». Ainsi, le graphe à cinq sommets ci-dessous admet la coloration à trois « couleurs » définis par : $c(s_0) = 0$, $c(s_1) = 1$, $c(s_2) = 0$, $c(s_3) = 1$, $c(s_4) = 2$.

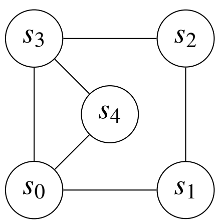


FIGURE 1 – Un graphe d'ordre cinq

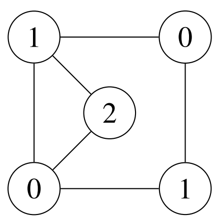


FIGURE 2 – Le graphe colorié avec trois « couleurs » (0, 1 et 2)

Les questions suivantes ont pour but de réaliser un programme Python qui renvoie une coloration d'un graphe G quelconque, en essayant de minimiser le nombre de couleurs utilisées.

1. Recopier et compléter le programme Python ci-dessous de manière à ce qu'il définisse une fonction « `voisins` » prenant en arguments la matrice d'adjacence A et un entier $i \in [\![0, n-1]\!]$, et renvoyant la liste des sommets voisins de s_i.

```python
def voisins(A,i):
    n = len(A[i])
    V = []
    for j in range(n):
        if j != i and ... :
            V.append(...)
    return(V)
```

2. Rédiger en Python une fonction « `min_ext` » qui prend en argument une liste d'entiers naturels L et qui renvoie le plus petit entier naturel n'appartenant pas à L (par exemple, si $L = [1, 0, 3,]$ alors la commande « `min_ext(L)` » renvoie 2). On pourra transcrire en langage Python l'algorithme suivant :

> On affecte à une variable m la valeur 0.
> Tant que m appartient à la liste L :
>   On augmente de 1 la valeur de m.
> On renvoie m.

3. À l'aide des fonctions introduites précédemment on rédige maintenant une fonction « `coloration` » prenant en argument la matrice d'adjacence $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ d'un graphe G, et renvoyant une coloration de G sous la forme d'une liste d'entiers $C = [C_0, \ldots, C_{n-1}]$, où C_i désigne la « couleur » du sommet s_i pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$.
On construit cette fonction selon l'algorithme « glouton » ci-dessous :

> On affecte à la variable n le nombre de sommets de G.
> On affecte à la variable C la liste $[0, 1, \ldots, n-1]$.
> Pour i allant de 1 à $n-1$:
>
> > On affecte à la variable « `C_voisins` » la liste des « couleurs » des sommets voisins de s_i.
> > On affecte à C_i le plus petit entier naturel qui n'est pas élément de la liste « `C_voisins` ».
>
> On renvoie la liste C.

Recopier et compléter la fonction « `coloration` » ci-dessous.

```python
def coloration(A):
    n = len(A[0])
    C = ...
    for i in range(1,n):
        C_voisins = [ ... for j in ... ]
        C[i] = min_ext(...)
    return(C)
```

4. On note A la matrice d'adjacence du graphe G représenté en figure 3 ci-contre.
   (a) Donner la liste obtenue en exécutant la commande « `coloration(A)` ».
   (b) Le graphe G admet-il une coloration à trois couleurs ? Si oui, exhiber une telle coloration.

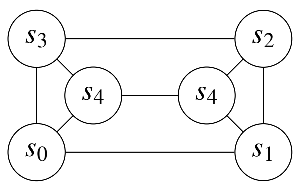


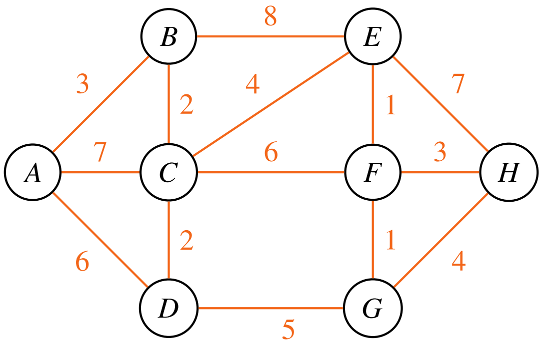
FIGURE 3 – Le graphe G

▸ Exercice 26

Afin de fibrer une zone rurale, un opérateur télécom étudie le réseau de raccordement possible entre son répartiteur principal (situé au sommet A) et un nouveau quartier résidentiel (situé au sommet H).

Les différents sommets représentent les points de relais possibles. Les arêtes représentent les tranchées qu'il est possible de creuser pour passer la fibre.

Les poids indiqués sur chaque arête correspondent au **coût d'installation en dizaines de milliers d'euros**.

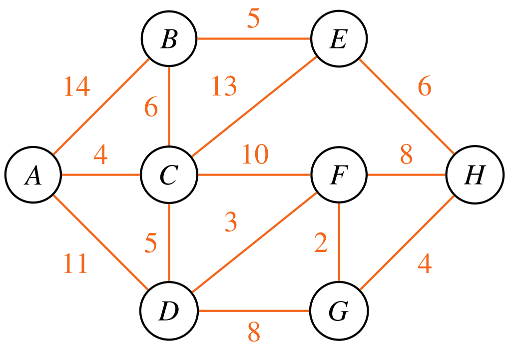


1. À l'aide de l'algorithme de Dijkstra, déterminer le coût d'installation minimal pour relier le répartiteur A au quartier H. On présentera la résolution sous la forme d'un tableau détaillé.
2. Quel est le chemin optimal que l'opérateur devra emprunter pour minimiser ce coût ?

▸ Exercice 27

Une entreprise de logistique doit acheminer un colis urgent de son entrepôt principal (sommet A) vers un point de livraison final (sommet H).

Le graphe ci-contre modélise le réseau routier reliant les différentes plateformes de tri de l'entreprise. Les arêtes représentent les routes possibles, et les poids indiquent **le temps de trajet en dizaines de minutes**.



1. En utilisant l'algorithme de Dijkstra, déterminer le temps de trajet minimal pour acheminer le colis de A à H. On présentera la démarche sous la forme d'un tableau détaillé.
2. Quel est l'itinéraire optimal que le chauffeur devra suivre ?