# Applications linéaires

## 1 Applications linéaires

### 1.1 Définition et premières propriétés

**Définition 1 :** Soit $n$ et $p$ deux entiers naturels non nuls. Soit $f$ une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.

- On dit que $f$ est une application linéaire lorsque :

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \forall u, v \in \mathbb{R}^n,\ f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v).$$

  L'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ est noté $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$.
- Lorsque $n = p$, on dit que $f$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.
  L'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ est noté $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.
- Lorsque $f$ est bijective, on dit que $f$ est un isomorphisme.
- Lorsque les deux conditions précédentes sont respectées, on dit que $f$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^n$.

▪ **Exemple 1 :** L'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ u & \longmapsto & 0_{\mathbb{R}^p} \end{array} \right.$ est une application linéaire.

L'application $\mathrm{id} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ u & \longmapsto & u \end{array} \right.$ est une application linéaire appelée **application identité**.

**Remarque :** on pourrait par ailleurs restreindre une application linéaire à tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. En effet, par définition, si $F$ est un sev de $\mathbb{R}^n$, alors pour tous réels $\lambda$ et $\mu$ et tous $u$ et $v$ dans $F$, on a $\lambda u + \mu v \in F$.

♥ **Méthode 1 :** Pour montrer qu'une application est linéaire...

- On pose $\lambda$ et $\mu$ des réels.
- On pose $u$ et $v$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ (l'**ensemble de départ**) quelconques.
- On calcule $f(\lambda u + \mu v)$.
- On montrer que c'est égal à $f(\lambda u + \mu v)$.

▪ **Exemple 2 :** On considère l'application $f : (x, y) \mapsto (2x + y\,,\, x - y\,,\, x + y)$, définie sur $\mathbb{R}^2$. Montrons que $f$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.

Soit $\lambda$ et $\mu$ deux réels. Soit $u = (x, y)$ et $v = (x', y')$ deux éléments de $\mathbb{R}^3$.

On a alors $(\lambda u + \mu v) = (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y')$. Ainsi

$$\begin{array}{rcl} f(\lambda u + \mu v) & = & (2(\lambda x + \mu x') + \lambda y + \mu y'\,,\, \lambda x + \mu x' - (\lambda y + \mu y')\,,\, \lambda x + \mu x' + \lambda y + \lambda y') \\ & = & (\lambda(2x + y) + \mu(2x' + y')\,,\, \lambda(x - y) + \mu(x' - y')\,,\, \lambda(x + y) + \mu(x' + y')) \\ & = & \lambda(2x + y\,,\, x - y\,,\, x + y) + \mu(2x' + y'\,,\, x' - y'\,,\, x' + y') \\ & = & \lambda f(u) + \mu f(v) \end{array}$$

L'application $f$ est linéaire.

■ **Exemple 3 :** Soit $a$ un réel. La fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax \end{array} \right.$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}$.

En effet, pour tous réels $\lambda$ et $\mu$ et pour tout $x$ et $y$ dans $\mathbb{R}$, on a

$$f(\lambda x + \mu y) = a(\lambda x + \mu y) = \lambda(ax) + \mu(ay) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

Les applications linéaires sont une généralisation des fonctions linéaires étudiées plus tôt dans votre scolarité.

**Propriété 1 :** Soit $f$ une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.

- $f(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathbb{R}^p}$ ;
- Pour tout réel $\lambda$, pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, on a $f(\lambda u) = \lambda f(u)$ ;
  En particulier, pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, $f(-u) = -f(u)$ ;
- Pour tout entier naturel $m \in \mathbb{N}^*$, pour tout $\lambda_1$, ..., $\lambda_m \in \mathbb{R}$, pour tout $u_1$, ..., $u_m \in \mathbb{R}^n$, on a

$$f\left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k u_k\right) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k f(u_k).$$

**Démonstration 1 :**

- Puisque $f$ est linéaire, on a, en prenant $\lambda = \mu = 0$ :

$$f(0_{\mathbb{R}^n}) = f(0 \times 0_{\mathbb{R}^n} + 0 \times 0_{\mathbb{R}^n}) = 0 \times f(0_{\mathbb{R}^n}) + 0 \times f(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathbb{R}^p}$$

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{R}^n$. On a

$$f(\lambda u) = f(\lambda u + 0 \times 0_{\mathbb{R}^n}) = \lambda f(u) + 0 \times f(0_{\mathbb{R}^n}) = \lambda f(u) + 0_{\mathbb{R}^p} = \lambda f(u).$$

- La troisième propriété se démontre par récurrence.

□

**Méthode 2 :** Pour montrer qu'une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ n'est pas linéaire, il suffit de montrer l'un des points suivants.

- On calculer $f(0_{\mathbb{R}^n})$. Si le résultat est différent de $0_{\mathbb{R}^p}$, alors $f$ n'est pas linéaire ;
- On trouve un réel $\lambda$ et un vecteur $u \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(\lambda u) \neq \lambda f(u)$ ;
- On trouve deux vecteurs $u$ et $v$ de $\mathbb{R}^n$ tels que $f(u + v) \neq f(u) + f(v)$.

■ **Exemple 4 :** Contrairement à certaines croyances répandues dans le milieu des étudiants d'ECG1, la fonction exp : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas linéaire. On a en effet $\exp(0) = 1 \neq 0$.

■ **Exemple 5 :** On considère l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + y + 1, z - y) \end{array} \right.$

On a alors $f((0, 0, 0)) = (1, 0) \neq 0_{\mathbb{R}^2}$. L'application $f$ n'est pas linéaire.

■ **Exemple 6 :** On considère l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (xy, x + y) \end{array} \right.$

On a alors $f((1, 0)) = (0, 1)$ et $f((0, 1)) = (0, 1)$. Ainsi, $f((1, 0)) + f((0, 1)) = (0, 2)$.

Or, $f((1, 0) + (0, 1)) = f((1, 1)) = (1, 2)$. Ainsi, $f$ n'est pas linéaire.

### 1.2 Opérations sur les applications linéaires

**Propriété 2 :** Soit $f$ et $g$ deux applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

- L'application $f+g$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.
- L'application $\lambda f$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.

En d'autres termes, toute combinaison linéaire d'applications linéaires est une application linéaire.

**Démonstration 2 :** Montrons par exemple que $f+g$ est linéaire. Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $u, v \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}(f+g)(\lambda u+\mu v) &= f(\lambda u+\mu v)+g(\lambda u+\mu v)\\ &= \lambda f(u)+\mu f(v)+\lambda g(u)+\mu g(v) \quad \text{(car } f \text{ et } g \text{ sont linéaires)}\\ &= \lambda(f(u)+g(u))+\mu(f(v)+g(v))\\ &= \lambda(f+g)(u)+\mu(f+g)(v)\end{aligned}$$

□

**Propriété 3 — Composition :** Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$. L'application composée $g \circ f$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^q$.

**Démonstration 3 :** Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $u, v \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}(g\circ f)(\lambda u+\mu v) &= g\big(f(\lambda u+\mu v)\big)\\ &= g\big(\lambda f(u)+\mu f(v)\big) \quad \text{(car } f \text{ est linéaire)}\\ &= \lambda g(f(u))+\mu g(f(v)) \quad \text{(car } g \text{ est linéaire)}\\ &= \lambda(g\circ f)(u)+\mu(g\circ f)(v)\end{aligned}$$

□

**Remarque :** si $f$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, on notera $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$, ...

# 2 Application linéaire canoniquement associée à une matrice

### 2.1 Application linéaire et matrice

C'est le lien fondamental de l'algèbre linéaire en classe préparatoire. Toute matrice cache une application linéaire, et réciproquement. Pour faire ce lien, on identifie un vecteur $u = (x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ à la matrice colonne correspondante $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

**Propriété 4 — et Définition :** Soit $M \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ une matrice à $p$ lignes et $n$ colonnes.

L'application $f : \left\{\begin{array}{ccc}\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})\\ X & \longmapsto & MX\end{array}\right.$ **définit** une unique application linéaire $f_M$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.

Pour tout vecteur $u \in \mathbb{R}^n$ de matrice colonne $X$, $f_M(u)$ est le vecteur de $\mathbb{R}^p$ dont la matrice colonne est $MX$.

L'application $f_M$ est appelée **l'application linéaire canoniquement associée** à la matrice $M$.

**Démonstration 4 :** La linéarité découle directement des propriétés du produit matriciel. Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Soit $u$, $v$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On note $U$ et $V$ les matrices colonnes canoniquement associées à $u$ et $v$. On a alors

$$f(\lambda U+\mu V) = M(\lambda U+\mu V) = \lambda MU+\mu MV = \lambda f(U)+\mu f(V)$$

Ainsi, $f_M(\lambda u+\mu v) = \lambda f_M(u)+\mu f_M(v)$. □

■ **Exemple 7 :** Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.

L'application linéaire $f_M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ associée à $A$ est définie pour tout vecteur $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par :

$$f_M((x, y, z)) = (2x - y\,,\, x + 3y + 4z)$$

En effet, pour calculer l'image de $u$, on utilise sa matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et on effectue le produit matriciel :

$$MX = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + 3y + 4z \end{pmatrix}$$

Les coefficients de la matrice colonne obtenue sont bien les composantes du vecteur image dans $\mathbb{R}^2$.

**Abus de notation (usuel) :** En toute rigueur, l'image d'un vecteur $u = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ devrait se noter avec des doubles parenthèses $f((x, y, z))$. Pour alléger l'écriture, il est souvent toléré d'omettre les parenthèses extérieures et d'écrire simplement $f(x, y, z)$.

**Propriété 5 — Existence et unicité de la matrice :** Réciproquement, soit $f$ une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.

Il existe une unique matrice $M \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ telle que $f = f_M$.
Autrement dit, pour tout vecteur $u \in \mathbb{R}^n$ de matrice colonne $X$, le vecteur $f(u)$ a pour matrice colonne $MX$.

Si $\mathcal{B}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$, la matrice $M$ est également notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

**Démonstration 5 :** Soit $u \in \mathbb{R}^n$. On peut décomposer le vecteur $u$ dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ à l'aide de ses coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ :

$$u = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$$

Puisque l'application $f$ est linéaire, l'image de $u$ s'écrit de manière additive :

$$f(u) = f(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n)$$

$$f(u) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + \cdots + x_n f(e_n)$$

Le vecteur image $f(u)$ est donc une **combinaison linéaire des vecteurs images** de la base canonique.

Or, par définition du produit matriciel, effectuer la combinaison linéaire de vecteurs colonnes $C_1, C_2, \ldots, C_n$ avec des coefficients $x_1, x_2, \ldots, x_n$ revient exactement à multiplier la matrice constituée de ces colonnes par le vecteur colonne contenant ces coefficients.

Ainsi, en construisant la matrice $M$ dont les colonnes sont les composantes de $f(e_1), \ldots, f(e_n)$, on a bien :

$$\text{Matrice colonne de } f(u) = \begin{pmatrix} | & & | \\ f(e_1) & \ldots & f(e_n) \\ | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = MX$$

Cela démontre simultanément l'existence de cette matrice, son unicité, et la méthode pratique pour la construire.

□

**Définition 2 — Matrice canoniquement associée :** Cette unique matrice $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est appelée **matrice canoniquement associée** à l'application linéaire $f$ (ou matrice de $f$ dans les bases canoniques).

Ce résultat qui justifie que l'on puisse ramener l'étude des applications linéaires à du calcul matriciel.

**Méthode 3 :** Pour construire la matrice $M \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ canoniquement associée à une application linéaire $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ :

- On considère $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de l'espace de départ $\mathbb{R}^n$.
- On calcule les images de ces vecteurs par $f$ : $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)$.
- On place les coordonnées de ces vecteurs images en **colonnes** pour former la matrice $M$.

**Exemple 8 :** On considère l'application identité id : $\begin{cases} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ u & \longmapsto & u \end{cases}$.

Montrons que sa matrice canoniquement associée est la matrice identité $I_n$.
Appliquons la méthode du cours. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Calculons les images des vecteurs de cette base par l'application id :

- $\mathrm{id}(e_1) = e_1$. Or, les composantes de $e_1$ sont $(1, 0, 0, \dots, 0)$.
- $\mathrm{id}(e_2) = e_2$. Ses composantes sont $(0, 1, 0, \dots, 0)$.
- $\dots$
- $\mathrm{id}(e_n) = e_n$. Ses composantes sont $(0, 0, \dots, 0, 1)$.

Pour construire la matrice, on place ces composantes en colonnes. La première colonne contient un 1 sur la première ligne, la deuxième colonne contient un 1 sur la deuxième ligne, et ainsi de suite jusqu'à la $n$-ième colonne.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

On retrouve bien exactement la définition de la matrice identité $I_n$.

**Exemple 9 :** On considère l'application linéaire $f$ : $\begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (2x - y + 3z\,,\ x + 4y) \end{cases}$

Déterminons sa matrice canoniquement associée $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
L'espace de départ est $\mathbb{R}^3$, dont la base canonique est constituée des vecteurs $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$. Calculons leurs images par l'application $f$ :

- $f(e_1) = f((1, 0, 0)) = (2(1) - 0 + 3(0)\,,\ 1 + 4(0)) = (2, 1)$
- $f(e_2) = f((0, 1, 0)) = (2(0) - 1 + 3(0)\,,\ 0 + 4(1)) = (-1, 4)$
- $f(e_3) = f((0, 0, 1)) = (2(0) - 0 + 3(1)\,,\ 0 + 4(0)) = (3, 0)$

En plaçant les composantes de ces trois vecteurs en colonnes, on obtient directement la matrice $M \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

**Méthode 4 :** Pour calculer l'image $v = f(u)$ d'un vecteur $u \in \mathbb{R}^n$ par une application linéaire $f$ de matrice $M$ dans la base canonique :

1. On écrit le vecteur $u$ sous forme de matrice colonne $U$ ;
2. On effectue le produit matriciel $V = AU$ ;
3. Les coefficients de la matrice colonne $V$ sont les composantes du vecteur image $v$.

■ **Exemple 10 :** On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ de matrice associée $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Calculons l'image du vecteur $u = (1, 2, -1)$.

1. On pose $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
2. On calcule $V = AU = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1(1) - 2(2) + 3(-1) \\ 0(1) + 4(2) + 5(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}$.
3. L'image par $f$ de $u$ est donc le vecteur $v = (-6, 3)$.

## 2.2 Lien avec la composition

**Théorème 6 :** Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ de matrice associée $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$.
Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ de matrice associée $B \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{R})$.

Alors la matrice associée à la composée $g \circ f$ est la matrice produit $B \times A$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$$

■ **Exemple 11 :** Considérons deux applications linéaires $f$ et $g$ définies par :

- $g : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (x + y\,,\ 2x - y\,,\ x) \end{cases}$
- $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x - z\,,\ y + 2z) \end{cases}$

On souhaite déterminer l'expression de l'application composée $f \circ g$ (qui va de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$). Nous allons d'abord déduire cette expression grâce au produit matriciel, puis nous vérifierons ce résultat par un calcul analytique direct.

**1. Déduction par le calcul matriciel**
Déterminons d'abord les matrices de $f$ et de $g$ dans les bases canoniques :

$$B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$$

D'après le cours, la matrice de $f \circ g$ est donnée par le produit $A \times B$ :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f \circ g) = A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1(1)+0(2)-1(1) & 1(1)+0(-1)-1(0) \\ 0(1)+1(2)+2(1) & 0(1)+1(-1)+2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Grâce à cette matrice, on peut immédiatement en déduire l'expression de $f \circ g$. Pour tout vecteur $u = (x, y)$, la matrice colonne de son image s'obtient par le produit :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 4x - y \end{pmatrix}$$

On en déduit donc l'expression analytique de la composée :

$$(f \circ g)(x, y) = (y\,,\, 4x - y)$$

**2. Vérification par le calcul analytique**
Vérifions ce résultat en calculant directement l'expression de l'application composée.
Pour un vecteur $u = (x, y)$ :

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x, y) &= f\big(g(x, y)\big) \\ &= f(x + y\,,\, 2x - y\,,\, x) \end{aligned}$$

On applique alors la formule de $f(X, Y, Z) = (X - Z\,,\, Y + 2Z)$ en remplaçant $X, Y, Z$ par les composantes de $g(u)$ :

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x, y) &= \big((x + y) - x\,,\, (2x - y) + 2(x)\big) \\ &= (y\,,\, 4x - y) \end{aligned}$$

On retrouve bien exactement la même expression, ce qui valide notre calcul matriciel.

**Propriété 6 — Lien avec l'inversibilité :** Soit $f$ un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ et $M$ sa matrice canoniquement associée.

Alors $f$ est un automorphisme (c'est-à-dire que $f$ est bijectif) si et seulement si $M$ est inversible.

Dans ce cas, la matrice canoniquement associée à $f^{-1}$ est $M^{-1}$, c'est-à-dire $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f))^{-1}$.

**Démonstration 7 :** Nous allons démontrer cette équivalence par double implication, en utilisant le théorème de composition des matrices. On rappelle au préalable que la matrice canoniquement associée à l'application $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ est la matrice identité $I_n$.

$\Longrightarrow$ **Supposons que $f$ est un automorphisme.**
Par définition, $f$ est bijective. Elle admet donc une application réciproque $f^{-1}$, qui est également un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. Par définition de la réciproque, on a les égalités fonctionnelles :

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} \quad \text{et} \quad f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$$

En notant $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $M' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1})$, la traduction matricielle donne :

$$M \times M' = I_n \quad \text{et} \quad M' \times M = I_n$$

Ainsi, la matrice $M$ est inversible, et que son inverse $M^{-1}$ n'est autre que $M'$.
On a donc bien prouvé que $M$ est inversible, et que $M^{-1} = \mathrm{Mat}(f^{-1})$.

$\Longleftarrow$ **Supposons que la matrice $M$ est inversible.**
Il existe donc une matrice inverse $M^{-1}$ telle que :

$$M \times M^{-1} = I_n \quad \text{et} \quad M^{-1} \times M = I_n$$

Soit $g$ l'application linéaire canoniquement associée à la matrice $M^{-1}$.
En traduisant ces égalités matricielles dans le monde des applications linéaires (le produit redevient la composition), on obtient :

$$f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} \quad \text{et} \quad g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$$

Avoir trouvé une application $g$ qui, composée avec $f$ (à gauche comme à droite), donne l'identité, prouve par définition que $f$ est bijective, et que sa réciproque est $g$.
Puisque $f$ est un endomorphisme bijectif, c'est un automorphisme.

□

▪ **Exemple 12 :** On considère l'endomorphisme $f$ de $\mathbb{R}^2$ défini pour tout vecteur $(x, y)$ par :

$$f(x, y) = (x + 2y\ ,\ 3x + 4y)$$

Montrons que $f$ est un automorphisme et déterminons l'expression de son application réciproque $f^{-1}$.

La matrice de $f$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Pour savoir si l'endomorphisme $f$ est bijectif, il suffit de vérifier si sa matrice $M$ est inversible. Calculons son déterminant :

$$\det(M) = 1 \times 4 - 2 \times 3 = 4 - 6 = -2$$

Puisque $\det(M) \neq 0$, la matrice $M$ est inversible. On en déduit immédiatement que $f$ **est un automorphisme**.

De plus, d'après le cours, la matrice de l'application réciproque $f^{-1}$ est exactement la matrice inverse $M^{-1}$.
Calculons cette matrice inverse :

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

L'application réciproque $f^{-1}$ est l'application canoniquement associée à la matrice $M^{-1}$. En lisant simplement les lignes de cette matrice, on obtient l'expression analytique de $f^{-1}$ :

$$f^{-1}(x, y) = \left(-2x + y\ ,\ \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y\right)$$

# 3 Noyau

## 3.1 Noyau d'une application linéaire

**Définition 3 — Noyau :** Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$. On appelle **noyau** de $f$, et on note $\text{Ker}(f)$, l'ensemble des vecteurs de l'espace de départ $\mathbb{R}^n$ dont l'image par $f$ est le vecteur nul de $\mathbb{R}^p$.

$$\text{Ker}(f) = \{u \in \mathbb{R}^n \mid f(u) = 0_{\mathbb{R}^p}\}$$

**Propriété 7 :** Le noyau d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

**Démonstration 8 :**

- $\text{Ker}(f)$ est inclus dans $\mathbb{R}^n$ par définition.
- $\text{Ker}(f)$ n'est pas vide car pour toute application linéaire, $f(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathbb{R}^p}$. Donc $0_{\mathbb{R}^n} \in \text{Ker}(f)$.
- Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $u, v \in \text{Ker}(f)$. On a $f(u) = 0_{\mathbb{R}^p}$ et $f(v) = 0_{\mathbb{R}^p}$.
  Alors $f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v) = \lambda 0_{\mathbb{R}^p} + \mu 0_{\mathbb{R}^p} = 0_{\mathbb{R}^p}$.
  Donc $\lambda u + \mu v \in \text{Ker}(f)$.
  Le noyau contient le vecteur nul et est stable par combinaison linéaire : c'est un sous-espace vectoriel.

□

**Méthode 5 :** Pour déterminer le noyau d'une application $f$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ :

- On pose $u = (x_1, \dots, x_n)$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$.
- On écrit l'équation $f(u) = 0_{\mathbb{R}^p}$ et on la traduit sous la forme d'un système linéaire homogène.
- On résout ce système.
- On exprime les solutions sous forme d'un espace engendré : **Vect**(...).

**Exemple 13 :** Déterminons le noyau de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(x, y, z) = (x - y\,,\ y - z\,,\ x - z)$.

Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} u \in \text{Ker}(f) &\iff f(x,y,z) = (0,0,0) \\ &\iff \begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ y = z \\ x = z \end{cases} \iff x = y = z \end{aligned}$$

Ainsi, $u \in \text{Ker}(f) \iff u = (x, x, x) = x(1, 1, 1)$. On en déduit que $\text{Ker}(f) = \text{Vect}((1, 1, 1))$.

**Exemple 14 :** Déterminons le noyau de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ défini par :

$$f(x, y, z, t) = (x + y + t\,,\ 2x + y - z + 3t\,,\ x + 2y + z\,,\ 3x - y - 4z + 7t)$$

Soit $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

$$u \in \text{Ker}(f) \iff f(x,y,z,t) = (0,0,0,0) \iff \begin{cases} x + y + t = 0 & (L_1) \\ 2x + y - z + 3t = 0 & (L_2) \\ x + 2y + z = 0 & (L_3) \\ 3x - y - 4z + 7t = 0 & (L_4) \end{cases}$$

Appliquons la méthode du pivot de Gauss. On utilise la ligne $L_1$ pour éliminer la variable $x$ dans les autres équations :

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} x & + & y & & & + & t & = & 0 & (L_1) \\ & - & y & - & z & + & t & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ & & y & + & z & - & t & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \\ & - & 4y & - & 4z & + & 4t & = & 0 & (L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1) \end{array}\right.$$

On utilise maintenant la nouvelle ligne $L_2$ pour éliminer $y$ dans $L_3$ et $L_4$ :

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} x & + & y & & & + & t & = & 0 & (L_1) \\ & - & y & - & z & + & t & = & 0 & (L_2) \\ & & 0 & & & & & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_2) \\ & & 0 & & & & & = & 0 & (L_4 \leftarrow L_4 - 4L_2) \end{array}\right.$$

Les deux dernières équations sont de la forme $0 = 0$ : elles sont toujours vérifiées et n'apportent aucune contrainte. Le système se résume donc à deux équations principales. Nous pouvons exprimer les variables $x$ et $y$ en fonction des deux autres variables ($z$ et $t$) qui deviennent des paramètres :

- D'après $L_2$ : $y = -z + t$
- En remplaçant $y$ dans $L_1$ : $x = -y - t = -(-z + t) - t = z - 2t$

Ainsi, un vecteur $u$ appartient à $\mathrm{Ker}(f)$ si et seulement s'il s'écrit sous la forme :

$$u = (z - 2t\,,\ -z + t\,,\ z\,,\ t)$$

On sépare alors les variables $z$ et $t$ pour faire apparaître une combinaison linéaire de deux vecteurs :

$$u = z(1, -1, 1, 0) + t(-2, 1, 0, 1)$$

On en déduit que le noyau de $f$ est le sous-espace vectoriel engendré par ces deux vecteurs :

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\big((1, -1, 1, 0)\,,\ (-2, 1, 0, 1)\big)$$

*Remarque : Les deux vecteurs générateurs n'étant pas colinéaires, ils forment une famille libre. Le noyau est donc de dimension 2 (c'est un plan vectoriel de $\mathbb{R}^4$).*

**Propriété 8 — Lien avec l'injectivité :** Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$.

$$f \text{ est injective} \iff \mathrm{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$$

**Démonstration 9 :** Nous devons démontrer une équivalence, nous procédons donc par double implication.

$\Longrightarrow$ **Supposons que $f$ est injective.** Montrons que $\mathrm{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.
Soit $u \in \mathrm{Ker}(f)$. Par définition du noyau, on a $f(u) = 0_{\mathbb{R}^p}$.
Or, on sait que pour toute application linéaire, $f(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathbb{R}^p}$. On a donc $f(u) = f(0_{\mathbb{R}^n})$.
Puisque $f$ est supposée injective, deux antécédents ayant la même image sont forcément égaux. Donc $u = 0_{\mathbb{R}^n}$.
Ainsi, $\mathrm{Ker}(f) \subset \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. Comme l'inclusion réciproque est évidente, on a bien $\mathrm{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.

$\Longleftarrow$ **Supposons que** $\mathrm{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$**.** Montrons que $f$ est injective.
Soient $u$ et $v$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ tels que $f(u) = f(v)$.

Puisque $f$ est linéaire, on peut écrire :

$$f(u) - f(v) = 0_{\mathbb{R}^p} \implies f(u - v) = 0_{\mathbb{R}^p}$$

Cela signifie que le vecteur $(u - v)$ appartient à $\text{Ker}(f)$.
Or, nous avons supposé que le noyau ne contient que le vecteur nul. Donc $u - v = 0_{\mathbb{R}^n}$, ce qui donne $u = v$.
L'application $f$ est donc bien injective.

□

## 3.2 Noyau d'une matrice

**Définition 4 :** Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$. On appelle **noyau de la matrice** $A$, noté $\text{Ker}(A)$, l'ensemble des matrices colonnes $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $AX = 0_{\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})}$.

$$\text{Ker}(A) = \left\{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 0\right\}$$

**Lien fondamental :** Le noyau de la matrice $A$ correspond exactement au noyau de l'application linéaire canoniquement associée $f_A$. Déterminer le noyau d'une application linéaire revient donc systématiquement à **résoudre un système linéaire homogène** $(AX = 0)$.

▪ **Exemple 15 :** Déterminons le noyau de la matrice non carrée $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$.

**Attention à la dimension :** La matrice $A$ possédant $n = 4$ colonnes, l'espace de départ est $\mathbb{R}^4$. Les éléments du noyau sont donc des vecteurs colonnes à 4 lignes. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

$$X \in \text{Ker}(A) \iff AX = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 2y & - & z & + & t & = & 0 \quad (L_1) \\ 2x & + & 4y & + & z & - & t & = & 0 \quad (L_2) \\ 3x & + & 6y & & & & & = & 0 \quad (L_3) \end{array}\right.$$

Appliquons l'algorithme du pivot de Gauss en utilisant $L_1$ :

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 2y & - & z & + & t & = & 0 \quad (L_1) \\ & & & & 3z & - & 3t & = & 0 \quad (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ & & & & 3z & - & 3t & = & 0 \quad (L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1) \end{array}\right.$$

Les lignes $L_2$ et $L_3$ sont identiques. Le système se réduit donc à deux équations significatives pour quatre inconnues. On choisit d'exprimer $x$ et $z$ en fonction des deux paramètres libres $y$ et $t$ :

- D'après $L_2$ : $3z = 3t \implies z = t$
- En remplaçant $z$ par $t$ dans $L_1$ : $x + 2y - t + t = 0 \implies x = -2y$

Ainsi, une matrice colonne $X$ appartient à $\mathrm{Ker}(A)$ si et seulement si elle s'écrit :

$$X = \begin{pmatrix} -2y \\ y \\ t \\ t \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que le noyau de la matrice $A$ est engendré par ces deux vecteurs colonnes :

$$\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}\left( \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

*Remarque : Les deux vecteurs générateurs n'étant pas colinéaires, ils forment une famille libre. On a donc* $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 2$.

# 4 Image

## 4.1 Image d'une application linéaire

**Définition 5 — Image :** Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$. On appelle **image** de $f$, et on note $\mathrm{Im}(f)$, l'ensemble des vecteurs de l'espace d'arrivée $\mathbb{R}^p$ qui possèdent au moins un antécédent par $f$.

$$\mathrm{Im}(f) = \{ f(u) \mid u \in \mathbb{R}^n \}$$

**Propriété 9 :** L'image d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$. De plus, si $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$, alors :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left( f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n) \right)$$

**Méthode 6 :** Pour déterminer l'image d'une application $f$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ :

- On calcule les images des vecteurs de la base canonique : $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)$.
- On écrit que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$.
- On simplifie si possible la famille génératrice en retirant les vecteurs nuls ou ceux qui s'écrivent comme combinaisons linéaires des autres.

**Exemple 16 :** Reprenons $f(x, y, z) = (x - y\ ,\ y - z\ ,\ x - z)$. Cherchons $\mathrm{Im}(f)$.
La base canonique de $\mathbb{R}^3$ est constituée des vecteurs $e_1, e_2, e_3$. Calculons leurs images :

- $f(e_1) = f(1, 0, 0) = (1, 0, 1)$
- $f(e_2) = f(0, 1, 0) = (-1, 1, 0)$
- $f(e_3) = f(0, 0, 1) = (0, -1, -1)$

Donc $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((1, 0, 1), (-1, 1, 0), (0, -1, -1))$.
On remarque que $(1, 0, 1) + (-1, 1, 0) = (0, 1, 1) = -(0, -1, -1)$. Le troisième vecteur est donc combinaison linéaire des deux premiers, on peut l'enlever de la famille génératrice sans en modifier l'espace engendré.
Finalement : $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((1, 0, 1), (-1, 1, 0))$.

**Définition 6 — Rang d'une application linéaire :** Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$. On appelle **rang** de l'application linéaire $f$, et on note $\text{rg}(f)$, la dimension de son image :

$$\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f))$$

▪ **Exemple 17 :** Dans l'exemple précédent, l'image de $f$ est engendrée par deux vecteurs non colinéaires. Ils forment donc une base de $\text{Im}(f)$. L'image est un espace de dimension 2, ce qui signifie que $\text{rg}(f) = 2$.

**Propriété 10 — Lien avec la surjectivité :** Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$.

$$f \text{ est surjective} \iff \text{Im}(f) = \mathbb{R}^p$$

## 4.2 Rang d'une matrice

**Définition 7 — Rang d'une matrice :** Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$. On appelle **rang de la matrice** $A$, et on note $\text{rg}(A)$, la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ engendré par les vecteurs colonnes de $A$.
Autrement dit, le rang de $A$ est le rang de la famille de ses vecteurs colonnes.

**Lien fondamental :** Puisque les colonnes de la matrice $A$ sont exactement les images des vecteurs de la base canonique par l'application $f_A$, l'espace engendré par les colonnes de $A$ correspond à $\text{Im}(f_A)$. Ainsi, **le rang de la matrice $A$ est égal à la dimension de l'image de $f_A$.**

▪ **Exemple 18 :** Déterminons le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$.

Les colonnes de $A$ sont $C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $C_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $C_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.
On remarque immédiatement que $C_2 = 2C_1$. On peut donc retirer $C_2$ de la famille génératrice sans changer la dimension de l'espace engendré.

Les colonnes $C_1$ et $C_3$ ne sont pas colinéaires, elles forment donc une famille libre.

Ainsi, $\text{Im}(A) = \text{Vect}(C_1, C_3)$ est un espace de dimension 2.

Le rang de la matrice $A$ est donc égal à 2.

**Propriété 11 — Propriété admise :** Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, le rang de $A$ est égal au rang de sa transposée :

$$\text{rg}(A) = \text{rg}({}^tA)$$

En pratique, cela signifie que le rang de la famille des vecteurs colonnes est toujours égal au rang de la famille des vecteurs lignes.

# 5 Théorème du rang

Le théorème du rang est l'un des résultats les plus puissants de l'algèbre linéaire en dimension finie. Il relie intimement la taille du noyau (ce qui est "écrasé" par l'application) et la taille de l'image (ce qui "survit" à l'application).

**Propriété 12 — Théorème du rang :** Soit $f$ une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. On a l'égalité :

$$\dim(\mathbb{R}^n) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f)$$

Autrement dit : $n = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f)$.

Cette égalité s'applique également de façon stricte aux matrices : pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ possédant $n$ colonnes, on a : $n = \dim(\mathrm{Ker}(A)) + \mathrm{rg}(A)$.

**Attention :** Dans la formule du théorème du rang, la dimension de référence est toujours celle de **l'espace de départ** (soit $n$, le nombre de variables de la fonction, ou encore le nombre de colonnes de la matrice), et jamais la dimension de l'espace d'arrivée $p$.

**Exemple 19 :** Reprenons l'endomorphisme $f$ de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(x, y, z) = (x - y\,,\ y - z\,,\ x - z)$.

Nous avions trouvé que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}((1, 1, 1))$, qui est une droite vectorielle. Donc $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$.

D'après le théorème du rang, puisque l'espace de départ est $\mathbb{R}^3$ ($n = 3$) :

$$3 = 1 + \dim(\mathrm{Im}(f)) \text{ donc } \dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$$

Cela confirme notre calcul précédent où nous avions trouvé que l'image était engendrée par une famille libre de 2 vecteurs (un plan vectoriel).

**Exemple 20 :** Considérons l'application linéaire $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ canoniquement associée à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

On souhaite déterminer la dimension du noyau de $f$.

**Méthode 1 : résolution du système homogène associé :** Il faudrait poser un vecteur colonne $X$ à 4 inconnues, écrire le système $AX = 0_{\mathbb{R}^3}$, et appliquer l'algorithme du pivot de Gauss jusqu'à la fin pour trouver la forme paramétrée des solutions.

**Méthode 2 : Avec le théorème du rang :** On commence par étudier l'image de $f$, c'est-à-dire l'espace engendré par les colonnes de $A$. Notons $C_1, C_2, C_3$ et $C_4$ les quatre colonnes de cette matrice.

En observant attentivement les coefficients, des relations de dépendance sautent aux yeux :

- $C_3 = C_1 + C_2$
- $C_4 = 2C_1$

L'espace engendré par les colonnes se résume donc aux deux premières :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(C_1, C_2, C_3, C_4) = \mathrm{Vect}(C_1, C_2)$$

Les vecteurs $C_1$ et $C_2$ n'étant manifestement pas colinéaires, ils forment une famille libre.

L'image est donc un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$, ce qui signifie que $\mathrm{rg}(f) = 2$.

D'après le théorème du rang, puisque l'espace de départ est $\mathbb{R}^4$ (donc $n = 4$) :

$$\dim(\mathbb{R}^4) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f) \text{ soit } 4 = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + 2$$

On en déduit immédiatement que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$.

Par ailleurs, les relations que nous avons trouvées sur les colonnes de la matrice nous permettent de directement trouver une base du noyau.

- En effet, puisque $C_1 + C_2 - C_3 = 0_{n,1}$, alors le vecteur $(1, 1, -1, 0)$ appartient au noyau de $f$ ;
- De même, puisque $2C_1 - C_4 = 0_{n,1}$, alors le vecteur $(2, 0, 0, -1)$ appartient au noyau de $f$.

Ces deux vecteurs étant non colinéaires, ils forment une famille libre de vecteur de $\mathrm{Ker}(f)$. Or, puisque $\dim(\mathrm{Ker} f) = 2$, ces vecteurs forment en réalité une base de $\mathrm{Ker} f$.

Ainsi, $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Vect}((1, 1, -1, 0), (1, 0, 0, -2))$.

## 5.1 Conséquence majeure pour les endomorphismes

Lorsque les espaces de départ et d'arrivée ont la même dimension (ce qui est le cas des endomorphismes où l'on va de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$), le théorème du rang permet d'établir une équivalence fondamentale.

**Propriété 13 — Caractérisation des automorphismes :** Soit $f$ un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ (application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$). Les propositions suivantes sont **équivalentes** :

1. $f$ est injective ($\mathrm{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$).
2. $f$ est surjective ($\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^n$).
3. $f$ est un automorphisme (bijective).

**Démonstration 10 :** Puisque $f$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, le théorème du rang s'écrit :

$$n = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$$

- Si $f$ est injective, alors $\mathrm{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, donc $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0$. Le théorème du rang donne alors $\dim(\mathrm{Im}(f)) = n$. L'image étant un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ de même dimension que $\mathbb{R}^n$, on a $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^n$, ce qui prouve que $f$ est surjective.
- Si $f$ est surjective, alors $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^n$, donc $\dim(\mathrm{Im}(f)) = n$. Le théorème du rang donne alors $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0$. Le noyau est donc réduit à $\{0_{\mathbb{R}^n}\}$, ce qui prouve que $f$ est injective.

Injectivité et surjectivité s'impliquent mutuellement pour un endomorphisme, ces notions sont donc équivalentes à la bijectivité. □

R Cette proposition est l'un des outils les plus utilisés de l'année. En pratique, pour démontrer qu'un endomorphisme est bijectif, **on ne démontre presque jamais la surjectivité**. On se contente de résoudre $f(u) = 0$ pour montrer que le noyau est réduit à 0, et on conclut directement en invoquant le fait qu'il s'agit d'un endomorphisme en dimension finie !

▪ **Exemple 21 :** On considère l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + y\,,\ y + z\,,\ x + z) \end{array} \right.$

Montrons que $f$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.
L'application $f$ est linéaire (les composantes sont des combinaisons linéaires de $x, y, z$) et elle va de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ : c'est donc un endomorphisme.

Au lieu de chercher à prouver que tout vecteur de l'espace d'arrivée admet un unique antécédent, étudions simplement son noyau. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
u \in \mathrm{Ker}(f) \quad & \Longleftrightarrow \quad f(x, y, z) = (0, 0, 0) \\
& \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x + y & = & 0 \\ y + z & = & 0 \\ x + z & = & 0 \end{cases} \\
& \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x & = & -y \\ z & = & -y \\ -y - y & = & 0 \end{cases} \\
& \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x & = & 0 \\ z & = & 0 \\ -2y & = & 0 \end{cases} \\
& \Longleftrightarrow \quad x = y = z = 0
\end{aligned}$$

Le seul vecteur dont l'image est nulle est le vecteur nul. Donc $\mathrm{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.
L'endomorphisme $f$ est donc injectif.

Or, $f$ **est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie** ($\dim(\mathbb{R}^3) = 3$).

D'après le corollaire du théorème du rang, injectivité et bijectivité sont équivalentes.

On en déduit immédiatement que $f$ **est bijective**, c'est donc un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.