Exercices : Applications linéaires

▸ Exercice 1 – Voir le corrigé

Les applications suivantes sont-elles des applications linéaires ? Justifier soigneusement chaque réponse.

$$f_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x-y\,,\,x+3z) \end{array} \right. \qquad f_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+1\,,\,y-x) \end{array} \right.$$

$$f_3 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (xy\,,\,x+y) \end{array} \right. \qquad f_4 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x-4y \end{array} \right.$$

▸ Exercice 2 – Voir le corrigé

On considère les deux applications linéaires f et g définies par :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y\,,\,2x\,,\,x-y) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-y\,,\,y+z) \end{array} \right.$$

1. L'application composée $f \circ g$ est-elle bien définie ? Préciser son espace de départ et son espace d'arrivée.
2. Déterminer les matrices A et B canoniquement associées respectivement à f et à g.
3. Quelle est la matrice C canoniquement associée à $f \circ g$? La calculer.
4. Déduire de la question précédente l'expression analytique de $(f \circ g)(x,y,z)$.
5. Vérifier ce résultat en calculant directement $f\big(g(x,y,z)\big)$ par une méthode purement analytique.

▸ Exercice 3 – Voir le corrigé

Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & -2 & 7 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & -3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 5 & -5 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

▸ Exercice 4 – Voir le corrigé

On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(x,y,z) = (x+y\,,\,y-z\,,\,x+z)$$

1. Écrire la matrice M associée à f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer le noyau de f. L'application f est-elle injective ?
3. En déduire le rang de f. L'application f est-elle surjective ?
4. Déterminer une base de l'image de f.

▸ Exercice 5 – Voir le corrigé

On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie pour tout vecteur $u = (x, y, z)$ par :

$$f(x, y, z) = (x + y + z\,,\ 2x + y + 3z\,,\ x + 2z)$$

1. Écrire la matrice A canoniquement associée à f.
2. Déterminer le noyau de f et en donner une base. L'application f est-elle injective ?
3. À l'aide du théorème du rang, déterminer la dimension de l'image de f.
4. En déduire une base de $\mathrm{Im}(f)$. L'application f est-elle surjective ?
5. L'endomorphisme f est-il un automorphisme de $\mathbb{R}^3$? (Donner deux justifications différentes).

▸ Exercice 6 – Voir le corrigé

On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans les bases canoniques est donnée par :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

On note C_1, C_2, C_3, C_4 les colonnes de la matrice B. Le but de cet exercice est de déterminer le noyau et l'image de f sans résoudre le moindre système linéaire.

1. Exprimer les colonnes C_3 et C_4 comme des combinaisons linéaires simples des colonnes C_1 et C_2.
2. En déduire une base de $\mathrm{Im}(f)$, ainsi que le rang de f.
3. En utilisant le théorème du rang, déterminer la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$.
4. En traduisant les relations obtenues à la question 1, donner deux vecteurs non colinéaires appartenant à $\mathrm{Ker}(f)$.
5. Conclure en donnant une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

▸ Exercice 7 – Voir le corrigé

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. Pour tout réel λ, on définit l'ensemble E_λ par :

$$E_\lambda = \{u \in \mathbb{R}^n \mid f(u) = \lambda u\}$$

L'objectif de cet exercice est de démontrer que E_λ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ par deux méthodes différentes. Cet ensemble porte un nom que vous découvrirez plus tard dans l'année : c'est le *sous-espace propre* de f associé à λ.

Méthode 1 : Par la définition usuelle

1. En revenant à la définition, montrer que E_λ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Méthode 2 : Par l'utilisation du cours

On note id l'application identité de $\mathbb{R}^n$. On définit l'application $g = f - \lambda\mathrm{id}$.

2. Justifier rapidement que g est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.
3. Démontrer que $E_\lambda = \mathrm{Ker}(g)$.
4. En déduire sans aucun calcul que E_λ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

▸ Exercice 8 – Voir le corrigé

On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie pour tout vecteur $u = (x, y, z)$ par :

$$f(x, y, z) = (x - y + z\,,\ -x + y + z\,,\ -x - y + 3z)$$

Partie A : Polynôme annulateur

1. Écrire la matrice M canoniquement associée à f.
2. Calculer M^2 puis M^3.
3. On pose le polynôme $P : x \mapsto x^3 - 5x^2 + 8x - 4$. Vérifier que $P(M) = 0_3$ (où 0_3 est la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$).
   On dit alors que P est un polynôme annulateur de M (et donc de f).
4. Déterminer les racines du polynôme P.

Partie B : Recherche des espaces invariants

5. Soit u un vecteur **non nul** de $\mathbb{R}^3$ et λ un réel tels que $f(u) = \lambda u$.
   (a) Exprimer $f(f(u))$ puis $f(f(f(u)))$ en fonction de λ et u.
   (b) En utilisant la question 3, démontrer que $P(\lambda) \times u = 0_{\mathbb{R}^3}$.
   (c) En déduire que les seules valeurs possibles pour le réel λ sont 1 et 2.
6. On définit les ensembles $E_1 = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid f(u) = u\}$ et $E_2 = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid f(u) = 2u\}$.
   (a) Déterminer une base et la dimension de E_1.
   (b) Déterminer une base et la dimension de E_2.

Partie C : Changement de base

7. On note e_1 l'unique vecteur de la base de E_1, et (e_2, e_3) les deux vecteurs de la base de E_2 précédemment déterminés.
   On construit la matrice P en plaçant ces trois vecteurs en colonnes : $P = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix}$.
   Écrire la matrice P, justifier qu'elle est inversible et calculer P^{-1}.
8. Calculer la matrice $D = P^{-1}MP$. Que remarque-t-on sur la forme de D et sur les valeurs situées sur sa diagonale ?

▸ Exercice 9 – Voir le corrigé

Définition : On dit qu'un endomorphisme p de $\mathbb{R}^n$ est un **projecteur** si et seulement si $p \circ p = p$. Matriciellement, si M est la matrice de p, cela revient à vérifier que $M^2 = M$.

Cet exercice vise à observer les propriétés d'un projecteur sur un cas concret, puis à les démontrer dans le cas général en dimension n.

Partie A : Étude d'un cas concret dans $\mathbb{R}^3$
On considère la matrice M suivante et on note p l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à M :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer M^2. Que peut-on en déduire pour l'endomorphisme p ?
2. Déterminer une base et la dimension de $\mathrm{Ker}(p)$.
3. Déterminer une base et la dimension de $\mathrm{Im}(p)$. Vérifier la cohérence de ces résultats avec le théorème du rang.
4. Choisir le premier vecteur de votre base de $\mathrm{Im}(p)$ et calculer son image par p (à l'aide de la matrice). Que remarque-t-on ?

Partie B : Généralisation théorique dans $\mathbb{R}^n$
Soit p un projecteur quelconque d'un espace $\mathbb{R}^n$. Nous allons démontrer que les phénomènes observés dans la partie A sont toujours vrais.

5. Soit $v \in \mathrm{Im}(p)$. Démontrer que $p(v) = v$.

6. Soit $u \in \mathbb{R}^n$. On souhaite décomposer u et on pose pour cela : $a = p(u)$ et $b = u - p(u)$.
   (a) Justifier que $a \in \mathrm{Im}(p)$.
   (b) Calculer $p(b)$. En déduire que $b \in \mathrm{Ker}(p)$.
7. Déduire des questions précédentes que tout vecteur $u \in \mathbb{R}^n$ peut se décomposer comme la somme d'un vecteur de l'image de p et d'un vecteur du noyau de p.

▸ Exercice 10 – Voir le corrigé

Définition : On dit qu'un endomorphisme s de $\mathbb{R}^n$ est une **symétrie** si et seulement si $s \circ s = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$. Matriciellement, si M est la matrice de s, cela revient à vérifier que $M^2 = I_n$.

Cet exercice vise à observer les propriétés d'une symétrie sur un cas concret dans $\mathbb{R}^3$, puis à les démontrer dans le cas général en dimension n.

Partie A : Étude d'un cas concret dans $\mathbb{R}^3$
On considère la matrice M suivante et on note s l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à M :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer M^2. Que peut-on en déduire pour l'endomorphisme s ?
2. On note $E_1 = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid s(u) = u\}$.
   Déterminer une base et la dimension de E_1. (On l'appelle l'espace des vecteurs invariants).
3. On note $E_{-1} = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid s(u) = -u\}$.
   Déterminer une base et la dimension de E_{-1}.
4. On considère le vecteur $u = (1, 0, 0)$.
   (a) Calculer le vecteur $s(u)$ à l'aide de la matrice M.
   (b) Calculer les vecteurs $a = \frac{1}{2}\big(u + s(u)\big)$ et $b = \frac{1}{2}\big(u - s(u)\big)$.
   (c) Vérifier par le calcul que $a \in E_1$, que $b \in E_{-1}$, et que $a + b = u$.

Partie B : Généralisation théorique dans $\mathbb{R}^n$
Soit s une symétrie quelconque d'un espace $\mathbb{R}^n$. On définit de la même manière les sous-espaces $E_1 = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id})$ et $E_{-1} = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id})$.

5. Soit $u \in \mathbb{R}^n$. On pose $a = \frac{1}{2}\big(u + s(u)\big)$ et $b = \frac{1}{2}\big(u - s(u)\big)$.
   (a) Démontrer que $s(a) = a$. En déduire à quel sous-espace appartient a.
   (b) Démontrer que $s(b) = -b$. En déduire à quel sous-espace appartient b.
6. Déduire de la question précédente que tout vecteur $u \in \mathbb{R}^n$ peut se décomposer comme la somme d'un vecteur invariant par s et d'un vecteur "renversé" par s.
7. *Lien avec les projecteurs :* On définit un nouvel endomorphisme p en posant $p = \frac{1}{2}(s + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})$.
   En développant l'expression de $p \circ p$ et en utilisant le fait que s est une symétrie, démontrer que p est un projecteur.

1. Corrigés

▸ Correction 1 – Voir l'énoncé

1. **L'application f_1 est linéaire.**
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Soient $u = (x, y, z)$ et $v = (x', y', z')$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
Le vecteur $\lambda u + \mu v$ a pour composantes $(\lambda x + \mu x'\,,\ \lambda y + \mu y'\,,\ \lambda z + \mu z')$.
Calculons son image par f_1 :
$$\begin{aligned} f_1(\lambda u + \mu v) &= \big(2(\lambda x + \mu x') - (\lambda y + \mu y')\,,\ (\lambda x + \mu x') + 3(\lambda z + \mu z')\big) \\ &= \big(\lambda(2x - y) + \mu(2x' - y')\,,\ \lambda(x + 3z) + \mu(x' + 3z')\big) \\ &= \lambda(2x - y\,,\ x + 3z) + \mu(2x' - y'\,,\ x' + 3z') \\ &= \lambda f_1(u) + \mu f_1(v) \end{aligned}$$
2. **L'application f_2 n'est pas linéaire.**
D'après le cours, si une application est linéaire, l'image du vecteur nul de l'espace de départ doit être le vecteur nul de l'espace d'arrivée.
Or, ici : $f_2(0, 0) = (0 + 1\,,\ 0 - 0) = (1, 0) \neq (0, 0)$.
L'application n'est donc pas linéaire.
3. **L'application f_3 n'est pas linéaire.**
Cherchons un contre-exemple. On sait que pour une application linéaire, on doit avoir $f(\lambda u) = \lambda f(u)$.
Considérons le vecteur $u = (1, 1)$ et le réel $\lambda = 2$.
   - D'une part : $f_3(2 \times (1, 1)) = f_3(2, 2) = (2 \times 2\,,\ 2 + 2) = (4, 4)$.
   - D'autre part : $2 \times f_3(1, 1) = 2 \times (1 \times 1\,,\ 1 + 1) = 2 \times (1, 2) = (2, 4)$.

   Puisque $f_3(2u) \neq 2f_3(u)$, l'application n'est pas linéaire. *(Remarque : on pouvait aussi utiliser l'addition pour trouver un contre-exemple : $f(u + v) \neq f(u) + f(v)$).*
4. **L'application f_4 est linéaire.**
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Soient $u = (x, y)$ et $v = (x', y')$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.
$$\begin{aligned} f_4(\lambda u + \mu v) &= f_4(\lambda x + \mu x'\,,\ \lambda y + \mu y') \\ &= (\lambda x + \mu x') - 4(\lambda y + \mu y') \\ &= \lambda(x - 4y) + \mu(x' - 4y') \\ &= \lambda f_4(u) + \mu f_4(v) \end{aligned}$$
L'application f_4 (qui est une forme linéaire) est bien linéaire.

▸ Correction 2 – Voir l'énoncé

1. L'application g arrive dans $\mathbb{R}^2$ et l'application f part de $\mathbb{R}^2$. La composition est donc bien possible.
L'application $f \circ g$ prend un vecteur de $\mathbb{R}^3$, l'envoie dans $\mathbb{R}^2$ (par g), puis le renvoie dans $\mathbb{R}^3$ (par f).
C'est donc un **endomorphisme de** $\mathbb{R}^3$: $f \circ g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.
2. La matrice d'une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ est de taille $p \times n$.
   - Pour $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, la matrice A est dans $\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$. En lisant les coefficients de x et y :
$$A = \mathrm{Mat}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
   - Pour $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, la matrice B est dans $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$. En lisant les coefficients de x, y et z :
$$B = \mathrm{Mat}(g) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. D'après le cours, la matrice de la composée $f \circ g$ est le produit des matrices, **dans le même ordre d'application**. Puisque g agit en premier, sa matrice B est placée à droite :

$$C = \mathrm{Mat}(f \circ g) = A \times B$$

Effectuons le calcul (le produit d'une 3×2 par une 2×3 donnera bien une matrice 3×3) :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1(1)+1(0) & 1(-1)+1(1) & 1(0)+1(1) \\ 2(1)+0(0) & 2(-1)+0(1) & 2(0)+0(1) \\ 1(1)-1(0) & 1(-1)-1(1) & 1(0)-1(1) \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

4. Connaissant la matrice de l'application $f \circ g$, on peut trouver l'image d'un vecteur $u = (x, y, z)$ en effectuant le produit CX :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z \\ 2x-2y \\ x-2y-z \end{pmatrix}$$

On en déduit l'expression analytique de l'application composée :

$$(f \circ g)(x, y, z) = (x+z\,,\ 2x-2y\,,\ x-2y-z)$$

5. Vérifions par le calcul fonctionnel. Pour tout vecteur $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x, y, z) &= f\big(g(x, y, z)\big) \\ &= f(x-y\,,\ y+z) \end{aligned}$$

On utilise l'expression de $f(X, Y) = (X+Y\,,\ 2X\,,\ X-Y)$ en remplaçant X par $(x-y)$ et Y par $(y+z)$:

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x, y, z) &= \big((x-y)+(y+z)\,,\ 2(x-y)\,,\ (x-y)-(y+z)\big) \\ &= (x+z\,,\ 2x-2y\,,\ x-2y-z) \end{aligned}$$

On retrouve très exactement le résultat issu du calcul matriciel.

▸ Correction 3 – Voir l'énoncé

1. Pour A : $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ donne $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$. Puis $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$ donne $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Il y a 2 pivots non nuls, donc $\mathbf{rg}(A) = 2$.
2. Pour B : $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1$ donne $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$. Puis $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ donne une ligne nulle. Il y a 2 pivots non nuls, donc $\mathbf{rg}(B) = 2$.
3. Pour C : $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ donne $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$. Les lignes L_2, L_3 et L_4 sont identiques.
Après élimination, il reste 2 lignes. $\mathbf{rg}(C) = 2$.
4. Pour D : $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, $L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1$ donne $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & 4 & -8 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. On remarque que $L_3 = 4L_2$ et $L_4 = L_2$. Il reste 2 lignes non nulles après pivot. $\mathbf{rg}(D) = 2$.

► Correction 4 – Voir l'énoncé

1. $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. $u \in \mathrm{Ker}(f) \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} x+y=0 \\ y-z=0 \\ x+z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=-x \\ z=y=-x \\ x+(-x)=0 \end{cases} \iff y=z=-x.$
   Le noyau est $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}((1,-1,-1))$. $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0\}$, donc f **n'est pas injective**.
3. D'après le théorème du rang : $\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f)$, soit $3 = 1 + \mathrm{rg}(f)$. Donc $\mathbf{rg}(f) = 2$. Puisque $\mathrm{rg}(f) < 3$, f **n'est pas surjective**.
4. Comme $\mathrm{rg}(f) = 2$, il suffit de trouver deux colonnes non colinéaires de M. $C_1 = (1,0,1)$ et $C_2 = (1,1,0)$ conviennent. Une base de $\mathrm{Im}(f)$ est $((1,0,1),(1,1,0))$.

► Correction 5 – Voir l'énoncé

1. La matrice A s'obtient en plaçant en colonnes les images des vecteurs de la base canonique (e_1, e_2, e_3) :
   - $f(1,0,0) = (1,2,1)$
   - $f(0,1,0) = (1,1,0)$
   - $f(0,0,1) = (1,3,2)$

   On obtient donc : $A = \mathrm{Mat}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
2. Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ de matrice colonne X.
   $$u \in \mathrm{Ker}(f) \iff AX = 0 \iff \begin{cases} x + y + z = 0 & (L_1) \\ 2x + y + 3z = 0 & (L_2) \\ x + 2z = 0 & (L_3) \end{cases}$$
   De la ligne L_3, on tire immédiatement $x = -2z$.
   On remplace x dans L_1 : $-2z + y + z = 0 \implies y = z$.
   Vérifions si ces conditions satisfont la ligne L_2 : $2(-2z) + z + 3z = -4z + 4z = 0$. L'équation est bien vérifiée.
   Ainsi, $u \in \mathrm{Ker}(f) \iff u = (-2z, z, z) = z(-2,1,1)$.
   On a donc $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}((-2,1,1))$.
   La famille constituée du seul vecteur non nul $u_1 = (-2,1,1)$ est libre et génératrice de $\mathrm{Ker}(f)$, c'en est donc une **base**.
   Puisque $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, l'application f **n'est pas injective**.
3. L'application f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. D'après le théorème du rang :
   $$\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$$
   Puisque le noyau est engendré par un seul vecteur non nul, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$. L'espace de départ est $\mathbb{R}^3$, donc de dimension 3. Ainsi : $3 = 1 + \dim(\mathrm{Im}(f))$, ce qui donne $\dim(\mathbf{Im}(f)) = 2$.
   Le rang de f est de 2.
4. D'après le cours, l'image de f est engendrée par les colonnes de la matrice A. Notons C_1, C_2 et C_3 ces colonnes. On a $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(C_1, C_2, C_3)$.
   D'après la question précédente, nous savons que l'image est de dimension 2. Il suffit donc de trouver deux vecteurs non colinéaires dans cette famille génératrice pour former une base.
   Les vecteurs $C_1 = (1,2,1)$ et $C_2 = (1,1,0)$ ne sont manifestement pas colinéaires. Ils forment donc une famille libre de 2 vecteurs dans un espace de dimension 2 : c'est une **base de Im**(f).
   (Remarque : on pouvait effectivement vérifier que $C_3 = 2C_1 - C_2$, ce qui permettait de l'éliminer de la

famille génératrice).
Puisque $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension 2, on a $\mathrm{Im}(f) \neq \mathbb{R}^3$. L'application f **n'est pas surjective**.

5. Un automorphisme est un endomorphisme bijectif. Ici, f n'est pas un automorphisme.
   - **Justification 1 (par les applications) :** D'après la question 2, f n'est pas injective (ou d'après la question 4, f n'est pas surjective). Elle n'est donc pas bijective.
   - **Justification 2 (par les matrices) :** Pour qu'un endomorphisme soit un automorphisme, il faut que sa matrice soit inversible. Or, les colonnes de la matrice A sont liées ($C_3 = 2C_1 - C_2$, ou plus simplement $\mathrm{Ker}(A) \neq \{0\}$), la matrice n'est donc pas inversible.

► Correction 6 – Voir l'énoncé

1. En observant les colonnes de la matrice B, on remarque les relations suivantes :
   - $C_3 = C_1 + C_2$ (en effet, $1 - 1 = 0$, $2 + 1 = 3$, $-1 + 0 = -1$)
   - $C_4 = 3C_1$ (en effet, $3 \times 1 = 3$, $3 \times 2 = 6$, $3 \times (-1) = -3$)
2. L'image de f est l'espace engendré par les colonnes de B :

   $$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(C_1, C_2, C_3, C_4)$$

   Puisque C_3 et C_4 sont des combinaisons linéaires de C_1 et C_2, on peut les retirer de la famille génératrice sans modifier l'espace engendré :

   $$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(C_1, C_2)$$

   Les vecteurs $C_1 = (1, 2, -1)$ et $C_2 = (-1, 1, 0)$ n'étant pas colinéaires, ils forment une famille libre. C'est donc une base de $\mathrm{Im}(f)$. On en déduit que $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$.
3. L'application f est définie au départ de $\mathbb{R}^4$, donc $n = 4$. D'après le théorème du rang :

   $$\dim(\mathbb{R}^4) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f) \implies 4 = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + 2$$

   On en déduit que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$.
4. Les relations trouvées à la question 1 peuvent se réécrire sous la forme d'une combinaison linéaire nulle :
   - $C_3 = C_1 + C_2 \implies 1 \cdot C_1 + 1 \cdot C_2 - 1 \cdot C_3 + 0 \cdot C_4 = 0_{\mathbb{R}^3}$.
     Le vecteur $u_1 = (1, 1, -1, 0)$ appartient donc à $\mathrm{Ker}(f)$.
   - $C_4 = 3C_1 \implies 3 \cdot C_1 + 0 \cdot C_2 + 0 \cdot C_3 - 1 \cdot C_4 = 0_{\mathbb{R}^3}$.
     Le vecteur $u_2 = (3, 0, 0, -1)$ appartient donc à $\mathrm{Ker}(f)$.
5. Les vecteurs u_1 et u_2 appartiennent tous les deux à $\mathrm{Ker}(f)$. Ils ne sont manifestement pas colinéaires (à cause de la position de leurs zéros), ils forment donc une famille libre de $\mathrm{Ker}(f)$.
   Puisque nous savons d'après le théorème du rang que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$, cette famille libre de 2 vecteurs forme une base du noyau.
   Conclusion : $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\big((1, 1, -1, 0)\,,\ (3, 0, 0, -1)\big)$.

► Correction 7 – Voir l'énoncé

Méthode 1 :

1. E_λ est inclus dans $\mathbb{R}^n$ par définition. Vérifions s'il contient le vecteur nul.
   Puisque f est une application linéaire, on sait d'après le cours que $f(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathbb{R}^n}$.
   De plus, $\lambda \times 0_{\mathbb{R}^n} = 0_{\mathbb{R}^n}$.
   On a donc bien $f(0_{\mathbb{R}^n}) = \lambda 0_{\mathbb{R}^n}$, ce qui prouve que $0_{\mathbb{R}^n} \in E_\lambda$. L'ensemble n'est pas vide.
   Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Soient $u, v \in E_\lambda$.
   Par définition, cela signifie que $f(u) = \lambda u$ et $f(v) = \lambda v$.

Calculons l'image de la combinaison linéaire $(\alpha u + \beta v)$ par f. Puisque f est linéaire :

$$\begin{array}{rcl} f(\alpha u+\beta v) & = & \alpha f(u)+\beta f(v) \\ & = & \alpha(\lambda u)+\beta(\lambda v) \quad (\text{car } u, v \in E_\lambda) \\ & = & \lambda(\alpha u)+\lambda(\beta v) \\ & = & \lambda(\alpha u+\beta v) \end{array}$$

L'image du vecteur $(\alpha u + \beta v)$ est bien égale à λ fois ce même vecteur.
Donc $(\alpha u + \beta v) \in E_\lambda$.
Conclusion : E_λ contient le vecteur nul et est stable par combinaison linéaire, c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Méthode 2 :

2. D'après le cours, l'application f est linéaire, et l'application id est linéaire. Or, toute combinaison linéaire d'applications linéaires est une application linéaire.
   Ainsi, $g = 1\times f + (-\lambda)\times \mathrm{id}$ est bien une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire un endomorphisme.
3. Soit $u \in \mathbb{R}^n$. Raisonnons par équivalences :
   $$\begin{array}{rcl} u \in E_\lambda & \iff & f(u) = \lambda u \\ & \iff & f(u) - \lambda u = 0_{\mathbb{R}^n} \\ & \iff & f(u) - \lambda \mathrm{id}(u) = 0_{\mathbb{R}^n} \\ & \iff & (f - \lambda \mathrm{id})(u) = 0_{\mathbb{R}^n} \\ & \iff & g(u) = 0_{\mathbb{R}^n} \\ & \iff & u \in \mathrm{Ker}(g) \end{array}$$
   On a donc prouvé l'égalité ensembliste : $E_\lambda = \mathrm{Ker}(g)$.
4. Puisque g est une application linéaire, le cours nous dit que son noyau, $\mathrm{Ker}(g)$, est **toujours** un sous-espace vectoriel de l'espace de départ $\mathbb{R}^n$.
   Comme $E_\lambda = \mathrm{Ker}(g)$, E_λ est par conséquent un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

► Correction 8 – Voir l'énoncé

Partie A : Polynôme annulateur

1. En lisant les coefficients, on obtient : $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.
2. $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1-1 & -1-1-1 & 1-1+3 \\ -1-1-1 & 1+1-1 & -1+1+3 \\ -1+1-3 & 1-1-3 & -1-1+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \\ -3 & -3 & 7 \end{pmatrix}$.
   $M^3 = M\times M^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \\ -3 & -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3-3 & -3-1-3 & 3-3+7 \\ -1-3-3 & 3+1-3 & -3+3+7 \\ -1+3-9 & 3-1-9 & -3-3+21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 7 \\ -7 & 1 & 7 \\ -7 & -7 & 15 \end{pmatrix}$.
3. Calculons $P(M) = M^3 - 5M^2 + 8M - 4I_3$. Regardons coefficient par coefficient (par exemple pour la première colonne) :
   - Ligne 1 : $1 - 5(1) + 8(1) - 4(1) = 9 - 9 = 0$
   - Ligne 2 : $-7 - 5(-3) + 8(-1) - 4(0) = -7 + 15 - 8 = 0$
   - Ligne 3 : $-7 - 5(-3) + 8(-1) - 4(0) = 0$

   Le calcul est identique pour les autres coefficients. On obtient bien $P(M) = 0_3$.
4. $P(1) = 1^3 - 5(1^2) + 8(1) - 4 = 9 - 9 = 0$. Donc 1 est racine.
   On peut factoriser par $(X-1)$: $P(X) = (X-1)(aX^2 + bX + c)$.
   En développant et en identifiant les coefficients, on trouve $P(X) = (X-1)(X^2 - 4X + 4)$.
   On reconnaît une identité remarquable : $P(X) = (X-1)(X-2)^2$.

Les racines de P sont donc 1 et 2.

Partie B : Recherche des espaces invariants

5. (a) $f(f(u)) = f(\lambda u) = \lambda f(u) = \lambda(\lambda u) = \lambda^2 u$.
   De même, $f(f(f(u))) = f(\lambda^2 u) = \lambda^2 f(u) = \lambda^3 u$.
   (b) On sait que $P(f) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$. Appliquons cette fonction nulle au vecteur u :
$$\begin{array}{rcl} (f^3 - 5f^2 + 8f - 4\mathrm{id})(u) & = & 0_{\mathbb{R}^3} \\ f^3(u) - 5f^2(u) + 8f(u) - 4u & = & 0_{\mathbb{R}^3} \\ \lambda^3 u - 5\lambda^2 u + 8\lambda u - 4u & = & 0_{\mathbb{R}^3} \\ (\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4)u & = & 0_{\mathbb{R}^3} \\ P(\lambda) \times u & = & 0_{\mathbb{R}^3} \end{array}$$
   (c) Puisque le vecteur u est supposé non nul, le produit d'un réel par ce vecteur ne peut être nul que si le réel lui-même est nul. Donc $P(\lambda) = 0$.
   D'après la question 4, cela signifie que $\lambda \in \{1, 2\}$.
6. (a) Soit $u = (x, y, z)$. $u \in E_1 \iff MX = X \iff (M - I_3)X = 0 \iff \left\{\begin{array}{rcl} -y + z & = & 0 \\ -x + z & = & 0 \\ -x - y + 2z & = & 0 \end{array}\right. \iff$
$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & z \\ x & = & z \end{array}\right.$$
   Donc $u \in E_1 \iff u = (z, z, z) = z(1, 1, 1)$.
   Une base de E_1 est $e_1 = (1, 1, 1)$. $\dim(E_1) = 1$.
   (b) $u \in E_2 \iff MX = 2X \iff (M - 2I_3)X = 0 \iff \left\{\begin{array}{rcl} -x - y + z & = & 0 \\ -x - y + z & = & 0 \\ -x - y + z & = & 0 \end{array}\right. \iff z = x + y$
   Donc $u \in E_2 \iff u = (x, y, x + y) = x(1, 0, 1) + y(0, 1, 1)$.
   Les deux vecteurs $e_2 = (1, 0, 1)$ et $e_3 = (0, 1, 1)$ ne sont pas colinéaires. Ils forment une base de E_2. $\dim(E_2) = 2$.

Partie C : Changement de base

7. La matrice est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   Pour trouver son inverse, on résout le système $PX = Y$ avec $Y = (a, b, c)$:
$$\left\{\begin{array}{rcl} x + y & = & a \\ x + z & = & b \\ x + y + z & = & c \end{array}\right.$$
   La ligne 3 moins la ligne 1 donne : $z = c - a$.
   On remplace z dans L_2 : $x = b - z = b - c + a = a + b - c$.
   On remplace x dans L_1 : $y = a - x = a - a - b + c = -b + c$.
   Le système admet une unique solution pour tout Y, donc P est inversible et :
$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
8. Calculons d'abord MP :
$$MP = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculons ensuite $P^{-1}(MP)$:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1-1 & 2+0-2 & 0+2-2 \\ 0-1+1 & 0+0+2 & 0-2+2 \\ -1+0+1 & -2+0+2 & 0+0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Remarque : On obtient une matrice diagonale ! De plus, les valeurs sur la diagonale $(1, 2, 2)$ correspondent exactement aux réels λ trouvés à la question 4, qui vérifient $f(u) = \lambda u$.

► Correction 9 – Voir l'énoncé

Partie A : Étude d'un cas concret dans $\mathbb{R}^3$

1. On effectue le produit matriciel $M \times M$:

$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+1-3 & 2+2-3 & -6-3+6 \\ 2+2-3 & 1+4-3 & -3-6+6 \\ 2+1-2 & 1+2-2 & -3-3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

   On trouve $M^2 = M$. Matriciellement, cela signifie que $p \circ p = p$. L'endomorphisme p est bien un projecteur de $\mathbb{R}^3$.

2. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ de matrice colonne X.

$$u \in \text{Ker}(p) \iff MX = 0 \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & - & 3z & = & 0 \quad (L_1) \\ x & + & 2y & - & 3z & = & 0 \quad (L_2) \\ x & + & y & - & 2z & = & 0 \quad (L_3) \end{array} \right.$$

   Effectuons l'opération $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$: on obtient $-3y + 3z = 0$, d'où $y = z$.
   En remplaçant y par z dans L_3, on a $x + z - 2z = 0$, d'où $x = z$.
   Ainsi, $u \in \text{Ker}(p) \iff u = (z, z, z) = z(1, 1, 1)$.
   On a $\text{Ker}(p) = \text{Vect}((1, 1, 1))$. Le vecteur $(1, 1, 1)$ est non nul, il forme une **base de** $\text{Ker}(p)$. $\dim(\text{Ker}(p)) = 1$.

3. L'image de p est engendrée par les colonnes de M.
   On a $\text{Im}(p) = \text{Vect}(C_1, C_2, C_3) = \text{Vect}\big((2, 1, 1), (1, 2, 1), (-3, -3, -2)\big)$.
   Remarquons que C_1 et C_2 ne sont pas colinéaires. Ils forment une famille libre.
   De plus, d'après le théorème du rang, $\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\text{Ker}(p)) + \dim(\text{Im}(p))$, soit $3 = 1 + \dim(\text{Im}(p))$.
   L'image est donc de dimension 2. La famille (C_1, C_2) étant libre et constituée de 2 vecteurs, c'est une **base de Im**(p).

4. Le premier vecteur de la base de $\text{Im}(p)$ est $v = (2, 1, 1)$. Calculons son image par p en multipliant sa matrice colonne par M :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(2)+1(1)-3(1) \\ 1(2)+2(1)-3(1) \\ 1(2)+1(1)-2(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+1-3 \\ 2+2-3 \\ 2+1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   On remarque que le vecteur image est identique au vecteur de départ. On a $p(v) = v$.

Partie B : Généralisation théorique dans $\mathbb{R}^n$

5. Soit $v \in \text{Im}(p)$. Par définition de l'image, il existe un antécédent $w \in \mathbb{R}^n$ tel que $v = p(w)$.
   Appliquons p à cette égalité : $p(v) = p(p(w)) = (p \circ p)(w)$.
   Puisque p est un projecteur, $p \circ p = p$, donc $(p \circ p)(w) = p(w) = v$.
   Ainsi, on a bien démontré dans le cas général que $p(v) = v$ pour tout vecteur de l'image.

6. (a) $a = p(u)$. C'est l'image du vecteur u par l'application p, donc par définition, $a \in \text{Im}(p)$.

   (b) Puisque p est linéaire : $p(b) = p\big(u - p(u)\big) = p(u) - p(p(u))$.
   Or, on sait que $p \circ p = p$, donc $p(p(u)) = p(u)$.
   Il vient $p(b) = p(u) - p(u) = 0_{\mathbb{R}^n}$.
   L'image de b étant le vecteur nul, $b \in \mathrm{Ker}(p)$.
7. On remarque simplement que $a + b = p(u) + \big(u - p(u)\big) = u$.
   Tout vecteur $u \in \mathbb{R}^n$ peut donc s'écrire $u = a + b$ avec $a \in \mathrm{Im}(p)$ et $b \in \mathrm{Ker}(p)$.

► Correction 10 – Voir l'énoncé

Partie A : Étude d'un cas concret dans $\mathbb{R}^3$

1. On effectue le produit matriciel $M \times M$:

$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-3+0 & 6-6+0 & 0+0+0 \\ -2+2+0 & -3+4+0 & 0+0+0 \\ 2-1-1 & 3-2-1 & 0+0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   On trouve $M^2 = I_3$. Matriciellement, cela signifie que $s \circ s = \mathrm{id}$. L'endomorphisme s est bien une symétrie de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ de matrice colonne X.

$$u \in E_1 \iff MX = X \iff (M - I_3)X = 0 \iff \begin{cases} x + 3y = 0 & (L_1) \\ -x - 3y = 0 & (L_2) \\ x + y - 2z = 0 & (L_3) \end{cases}$$

   La ligne L_1 donne $x = -3y$. (La ligne L_2 donne la même chose).
   En remplaçant x dans L_3, on a $-3y + y - 2z = 0$, soit $-2y = 2z$, ce qui donne $z = -y$.
   Ainsi, $u \in E_1 \iff u = (-3y, y, -y) = y(-3, 1, -1)$.
   On a $E_1 = \mathrm{Vect}((-3, 1, -1))$. C'est une droite vectorielle. Le vecteur $v_1 = (-3, 1, -1)$ en forme une **base**.
   $\dim(E_1) = 1$.
3.

$$u \in E_{-1} \iff MX = -X \iff (M + I_3)X = 0 \iff \begin{cases} 3x + 3y = 0 & (L_1) \\ -x - y = 0 & (L_2) \\ x + y = 0 & (L_3) \end{cases}$$

   Toutes les équations sont proportionnelles et se résument à $x + y = 0$, soit $x = -y$. La variable z n'apparaît plus, elle est donc un paramètre libre.
   Ainsi, $u \in E_{-1} \iff u = (-y, y, z) = y(-1, 1, 0) + z(0, 0, 1)$.
   On a $E_{-1} = \mathrm{Vect}\big((-1, 1, 0)\,,\ (0, 0, 1)\big)$.
   Ces deux vecteurs générateurs n'étant pas colinéaires, ils forment une **base** de E_{-1}. C'est un plan vectoriel, $\dim(E_{-1}) = 2$.
4. (a) L'image de $u = (1, 0, 0)$ correspond à la première colonne de la matrice M. Donc $s(u) = (2, -1, 1)$.
   (b) Calculons a et b :

$$a = \frac{1}{2}\big((1, 0, 0) + (2, -1, 1)\big) = \frac{1}{2}(3, -1, 1) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$b = \frac{1}{2}\big((1, 0, 0) - (2, -1, 1)\big) = \frac{1}{2}(-1, 1, -1) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

   (c)
   - On remarque que $a = -\frac{1}{2}(-3, 1, -1) = -\frac{1}{2}v_1$. Puisque a est proportionnel au vecteur de base de E_1, on a bien $a \in E_1$.
   - On remarque que $b = \frac{1}{2}(-1, 1, 0) - \frac{1}{2}(0, 0, 1)$. Il est combinaison linéaire des vecteurs de base de E_{-1}, donc $b \in E_{-1}$.

- Enfin, l'addition donne $a + b = (\frac{3}{2} - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}) = (1, 0, 0) = u$. L'égalité est vérifiée.

Partie B : Généralisation théorique dans $\mathbb{R}^n$

5. (a) Puisque s est une application linéaire :

$$s(a) = s\left(\frac{1}{2}(u + s(u))\right) = \frac{1}{2}\big(s(u) + s(s(u))\big)$$

Or s est une symétrie, donc $s(s(u)) = u$.

$$s(a) = \frac{1}{2}\big(s(u) + u\big) = a$$

Puisque $s(a) = a$, le vecteur a appartient à l'espace des invariants E_1.

(b) De la même manière :

$$s(b) = s\left(\frac{1}{2}(u - s(u))\right) = \frac{1}{2}\big(s(u) - s(s(u))\big) = \frac{1}{2}\big(s(u) - u\big) = -\frac{1}{2}\big(u - s(u)\big) = -b$$

Puisque $s(b) = -b$, le vecteur b appartient à l'espace E_{-1}.

6. Pour tout vecteur $u \in \mathbb{R}^n$, il suffit de poser $a = \frac{1}{2}(u + s(u))$ et $b = \frac{1}{2}(u - s(u))$. On vérifie trivialement que $a + b = \frac{1}{2}(2u) = u$.
D'après la question précédente, $a \in E_1$ et $b \in E_{-1}$. Tout vecteur u se décompose bien comme la somme de ces deux composantes.

7. Exprimons la composition $p \circ p$:

$$\begin{aligned} p \circ p &= \frac{1}{2}(s + \mathrm{id}) \circ \frac{1}{2}(s + \mathrm{id}) \\ &= \frac{1}{4}\big(s \circ s + s \circ \mathrm{id} + \mathrm{id} \circ s + \mathrm{id} \circ \mathrm{id}\big) \end{aligned}$$

Or $s \circ s = \mathrm{id}$, et $\mathrm{id} \circ s = s \circ \mathrm{id} = s$. On a donc :

$$\begin{aligned} p \circ p &= \frac{1}{4}\big(\mathrm{id} + s + s + \mathrm{id}\big) \\ &= \frac{1}{4}\big(2s + 2\mathrm{id}\big) \\ &= \frac{1}{2}\big(s + \mathrm{id}\big) \\ &= p \end{aligned}$$

Puisque $p \circ p = p$, l'endomorphisme p est bien un projecteur.