1. Cours : Convexité

1 Convexité, concavité

Définition 1 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère $(O\,,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$.

- On dit que f est *convexe* sur I si,

$$\forall (x_1, x_2) \in I^2, \forall (t_1, t_2) \in [0;1]^2 \,|\, t_1 + t_2 = 1,\ f(t_1x_1 + t_2x_2) \leqslant t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2).$$

ou de manière équivalente,

$$\forall (x_1, x_2) \in I^2, \forall t \in [0;1],\ f(tx_1 + (1-t)x_2) \leqslant t f(x_1) + (1-t) f(x_2).$$

- On dit que f est *concave* sur I si,

$$\forall (x_1, x_2) \in I^2, \forall (t_1, t_2) \in [0;1]^2 \,|\, t_1 + t_2 = 1,\ f(t_1x_1 + t_2x_2) \geqslant t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2).$$

ou de manière équivalente,

$$\forall (x_1, x_2) \in I^2, \forall t \in [0;1],\ f(tx_1 + (1-t)x_2) \geqslant t f(x_1) + (1-t) f(x_2).$$

Interprétation graphique

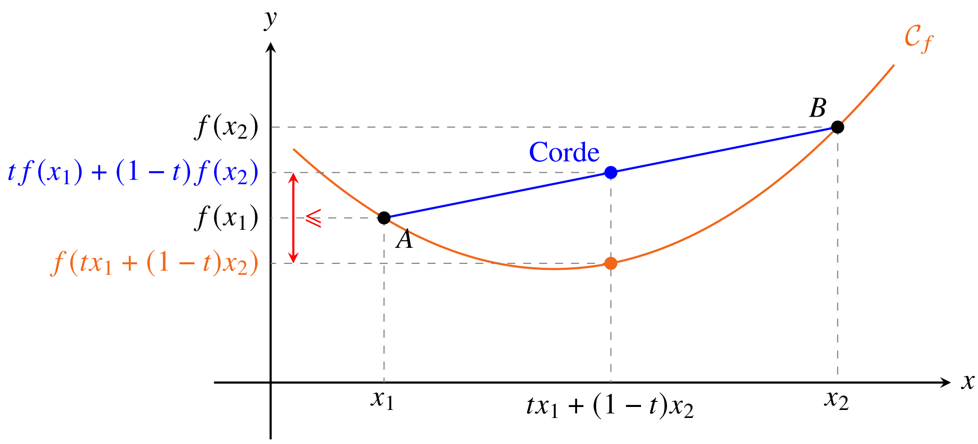
La notion d'inégalité de convexité repose géométriquement sur la position de la courbe par rapport à ses **cordes** (les segments de droite qui relient deux points quelconques de la courbe).

Pour bien comprendre la formule, il faut analyser ses deux composantes pour un paramètre $t \in [0;1]$:

- **L'abscisse :** $x = tx_1 + (1-t)x_2$ représente un point sur l'axe des abscisses situé entre x_1 et x_2 (on parle du barycentre de x_1 et x_2 pondéré par t et $1-t$).
- **Les ordonnées :**
  - $tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$ correspond à l'ordonnée du point situé sur la **corde** (le segment) reliant les points $A(x_1, f(x_1))$ et $B(x_2, f(x_2))$.
  - $f(tx_1 + (1-t)x_2)$ correspond à l'ordonnée du point situé sur la **courbe** $\mathcal{C}_f$ pour cette même abscisse.

On en déduit les interprétations suivantes :

- **Fonction convexe :** Dire que f est convexe sur I signifie géométriquement que la courbe $\mathcal{C}_f$ est située **en dessous** de chacune de ses cordes sur l'intervalle I.
- **Fonction concave :** Dire que f est concave sur I signifie géométriquement que la courbe $\mathcal{C}_f$ est située **au-dessus** de chacune de ses cordes sur l'intervalle I.



■ **Exemple 1 :** Montrons que la fonction $f : x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

Soit $t \in [0;1]$. Soit x_1 et x_2 deux réels. On a alors

$$\begin{aligned} tf(x_1)+(1-t)f(x_2)-f(tx_1+(1-t)x_2) &= tx_1^2+(1-t)x_2^2-(tx_1+(1-t)x_2)^2 \\ &= tx_1^2+(1-t)x_2^2-(t^2x_1^2+2t(1-t)x_1x_2+(1-t)^2x_2^2) \\ &= (t-t^2)x_1^2-2t(1-t)x_1x_2+((1-t)-(1-t)^2)x_2^2 \\ &= t(1-t)x_1^2-2t(1-t)x_1x_2+t(1-t)x_2^2 \\ &= t(1-t)(x_1^2-2x_1x_2+x_2^2) \\ &= t(1-t)(x_1-x_2)^2 \end{aligned}$$

Or, comme $t \in [0;1]$, on a $t \geqslant 0$ et $1-t \geqslant 0$, donc $t(1-t) \geqslant 0$. De plus, pour tous réels x_1 et x_2, un carré est positif, donc $(x_1-x_2)^2 \geqslant 0$.

Par produit de termes positifs, on en déduit que :

$$t(1-t)(x_1-x_2)^2 \geqslant 0$$

Ainsi, $tf(x_1)+(1-t)f(x_2)-f(tx_1+(1-t)x_2) \geqslant 0$, ce qui équivaut à :

$$f(tx_1+(1-t)x_2) \leqslant tf(x_1)+(1-t)f(x_2)$$

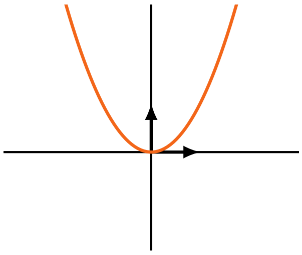
La fonction $f : x \mapsto x^2$ est donc bien convexe sur $\mathbb{R}$.

Propriété 1 : On a les résultats suivants sur les fonctions usuelles :

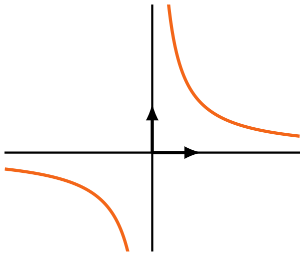
- La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$;
- La fonction ln est concave sur $\mathbb{R}_+^*$;
- Soit α un réel.
  - Si $\alpha \geqslant 1$, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$;
  - Si $\alpha \leqslant 1$, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

Rappel de certaines courbes représentatives

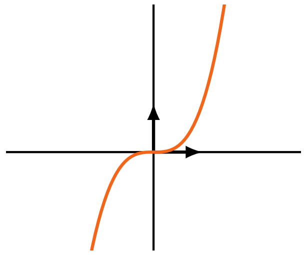
$x \mapsto x^2$



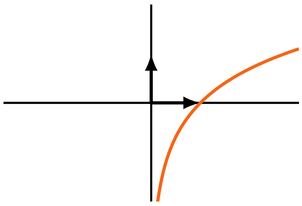
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$



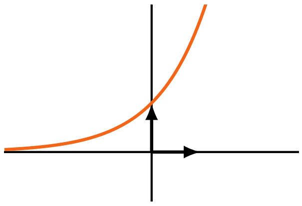
$x \mapsto x^3$



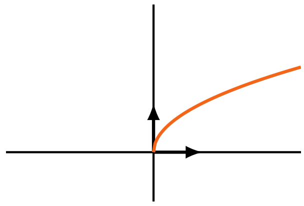
$x \mapsto \ln(x)$



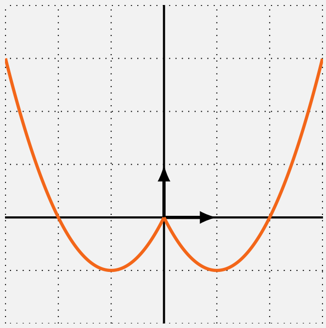
$x \mapsto e^x$



$x \mapsto \sqrt{x}$



▪ **Exemple 2 :** Attention : on parle bien de convexité sur un intervalle. Par ailleurs, ce n'est pas parce qu'une fonction f est convexe sur deux intervalles $[a, b]$ et $[b, c]$ que f est aussi convexe sur $[a, c]$.



La fonction représentée ci-dessus est convexe sur $[-3; 0]$ et sur $[0; 3]$ mais n'est pas convexe sur $[-3, 3]$.

Remarque : On peut démontrer que si une fonction est convexe sur un intervalle I, alors elle est obligatoirement **continue sur l'intérieur** de cet intervalle (c'est-à-dire partout, sauf éventuellement aux bornes). Une telle fonction admet par ailleurs des dérivées à gauche et à droite en tout point de l'intérieur de cet intervalle.

Cependant, en pratique dans ce cours et aux concours, nous étudierons presque exclusivement la convexité de fonctions dont nous savons déjà qu'elles sont dérivables (et donc continues).

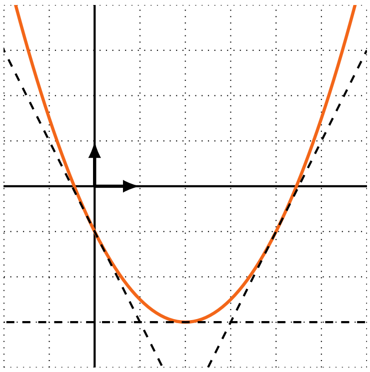
2 Fonctions dérivables

2.1 Caractérisation des fonctions convexes

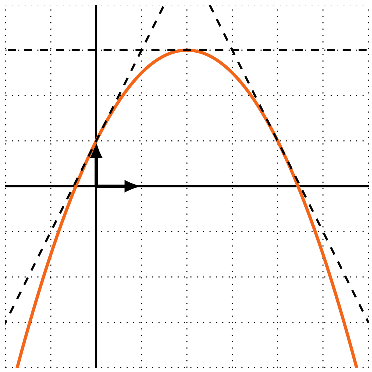
Propriété 2 : Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère $(O\,,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$.

- f est convexe sur I si et seulement si la courbe $\mathcal{C}_f$ se trouve au-dessus de toutes ses tangentes aux points d'abscisses $x \in I$.
- f est concave sur I si et seulement si la courbe $\mathcal{C}_f$ se trouve en-dessous de toutes ses tangentes aux points d'abscisses $x \in I$.

Fonction convexe



Fonction concave



▪ **Exemple 3 :** Montrons, à l'aide de cette nouvelle propriété, que la fonction $x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$. Notons $\mathcal{C}_f$ la courbe de f dans un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Soit a un réel.

- f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = 2x$.
- La tangente à $\mathcal{C}_f$ a pour équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$, c'est-à-dire $y = 2ax - 2a^2 + a^2$ ou encore $y = 2ax - a^2$.
- Pour tout réel x,

$$f(x) - (2ax - a^2) = x^2 - 2ax + a^2 = (x-a)^2 \geqslant 0.$$

Ainsi, $\mathcal{C}_f$ est toujours au-dessus de sa tangente à l'abscisse a, et ce, peu importe le réel a choisi. f est donc convexe sur $\mathbb{R}$.

Propriété 3 : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I.
- f est concave sur I si et seulement si f' est décroissante sur I.

2.2 Fonctions deux fois dérivables

De la propriété précédente, on en déduit naturellement la suivante...

Propriété 4 : Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.

- f est convexe sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f''(x) \geqslant 0$.
- f est concave sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f''(x) \leqslant 0$.

L'étude de la convexité d'une fonction revient à l'étude de signe de sa dérivée seconde (si celle-ci existe).

Démonstration 1 : Si $f'' \geqslant 0$, alors f est convexe : Soit f une fonction deux fois dérivable sur I telle que pour tout $x \in I$, $f''(x) \geqslant 0$.

Soit $a \in I$. La tangente à la courbe de f au point d'abscisse a a pour équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Pour tout $x \in I$, posons alors $g(x) = f(x) - (f'(a)(x-a) + f(a))$. g est deux fois dérivable sur I, et pour tout $x \in I$, on $g'(x) = f'(x) - f'(a)$ et $g''(x) = f''(x)$.

Ainsi, puisque pour tout $x \in I$, $f''(x) \geqslant 0$, on a aussi $g''(x) \geqslant 0$. g' est donc croissante sur I. Or, $g'(a) = 0$. Résumons toutes ces informations dans un tableau.

x		a	
$g''(x)$		$+$	
g'	$\nearrow$	0	$\nearrow$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
g	$\searrow$	0	$\nearrow$
$g(x)$	$+$	0	$+$

Finalement, pour tout $x \in I$, $g(x) \geqslant 0$, ce qui signifie que $f(x) \geqslant f'(a)(x-a) + f(a)$: la courbe de f est au-dessus de la tangente à cette courbe au point d'abscisse a. □

▪ **Exemple 4 :** Pour tout entier naturel pair $n \geqslant 2$, la fonction $x \mapsto x^n$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
En effet, la dérivée seconde de cette fonction est la fonction $x \mapsto n(n-1)x^{n-2}$.
Or, n étant pair, $n-2$ l'est aussi, et pour tout réel x, on a donc $x^{n-2} \geqslant 0$.

▪ **Exemple 5 :** La fonction $f : x \mapsto x^3$ est concave sur $]-\infty; 0]$ et convexe sur $[0; +\infty[$.

En effet, f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = 6x$, qui est du signe de x.

2.3 Application à la recherche d'extrema (optimisation)

Propriété 5 : Soit f une fonction dérivable et **convexe** sur un intervalle ouvert I, et soit $a \in I$.

Si la dérivée de f s'annule en a (c'est-à-dire $f'(a) = 0$), alors f admet un **minimum global** sur I en a.

Démonstration 2 : Puisque f est dérivable et convexe sur I, on sait d'après la propriété précédente que sa courbe $\mathcal{C}_f$ est située au-dessus de toutes ses tangentes. En particulier, la tangente au point d'abscisse a a pour équation :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Or, par hypothèse, $f'(a) = 0$. L'équation de la tangente se réduit donc à $y = f(a)$ (c'est une droite horizontale). Dire que la courbe est au-dessus de cette tangente signifie exactement que pour tout $x \in I$:

$$f(x) \geqslant f(a)$$

Le réel $f(a)$ est donc bien le minimum global de f sur l'intervalle I. □

Ce résultat est remarquablement puissant : habituellement, $f'(a) = 0$ indique potentiellement que f admet un extremum local. La convexité garantit qu'il s'agit bien d'un extremum et que celui-ci est **global**.

Par symétrie, si f est **concave** sur I et que $f'(a) = 0$, alors f admet un **maximum global** en a (la courbe étant en dessous de sa tangente horizontale).

Exemple 6 : Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x - x$.

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, $f'(x) = \mathrm{e}^x - 1$ et $f''(x) = \mathrm{e}^x$.

- Comme pour tout réel x, on a $\mathrm{e}^x > 0$, alors, pour tout réel x, $f''(x) > 0$.
  La fonction f est donc convexe sur $\mathbb{R}$.
- On cherche si la dérivée s'annule : $f'(x) = 0 \iff \mathrm{e}^x = 1 \iff x = 0$.

Puisque f est convexe sur $\mathbb{R}$ et que $f'(0) = 0$, on en déduit que f admet un minimum global en $x = 0$.

Pour tout réel x, on a donc $f(x) \geqslant f(0)$, c'est-à-dire $\mathrm{e}^x - x \geqslant 1$, ce qui démontre l'inégalité classique $\mathrm{e}^x \geqslant x + 1$.

3 Points d'inflexion

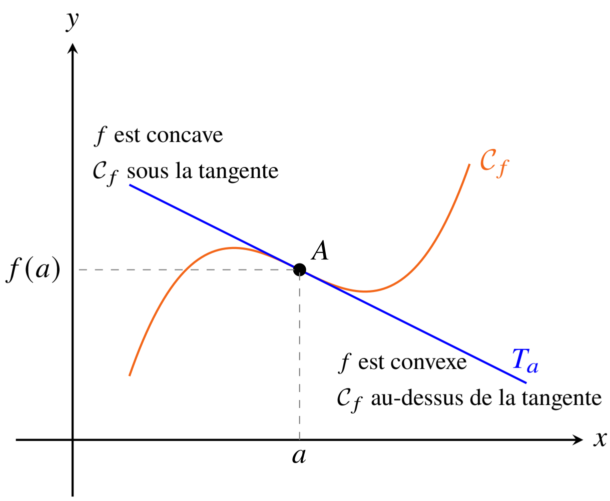
Définition 2 : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $a \in I$ (qui n'est pas une borne de I).

On dit que la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ admet un **point d'inflexion** au point d'abscisse a si la courbe **traverse sa tangente** en ce point.

De manière équivalente, cela signifie que la fonction f change de convexité en a (elle passe de concave à convexe, ou inversement).

Interprétation graphique

Au passage d'un point d'inflexion, la courbe passe d'une position située au-dessus de sa tangente à une position située en dessous (ou inversement).



Pour détecter analytiquement la présence d'un point d'inflexion, on étudie la dérivée seconde de la fonction.

Propriété 6 : Soit f une fonction deux fois dérivable (de classe $\mathcal{C}^2$) sur un intervalle I, et a un réel à l'intérieur de I.

La courbe $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion au point d'abscisse a si et seulement si $f''(a) = 0$ **et** f'' **change de signe** en a.

Attention, l'annulation de la dérivée seconde n'est pas suffisante !

Par exemple, pour la fonction $f : x \mapsto x^4$, on a $f''(x) = 12x^2$. On a bien $f''(0) = 0$, mais f'' est toujours positive sur $\mathbb{R}$.

La fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$ et la courbe ne traverse pas l'axe des abscisses (qui est sa tangente en 0). Il n'y a donc pas de point d'inflexion. Le changement de signe est capital.

Méthode 1 — Recherche de points d'inflexion : Pour trouver les éventuels points d'inflexion d'une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur I :

1. On calcule la dérivée f' puis la dérivée seconde f''.
2. On étudie le signe de f'' sur I (souvent en dressant un tableau de signes).
3. On identifie les valeurs a pour lesquelles f'' s'annule **en changeant de signe**. Les points d'inflexion sont alors les points de coordonnées $(a, f(a))$.

■ **Exemple 7 :** Étudions les points d'inflexion de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 - 1)e^x$.

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions usuelles qui le sont. Pour tout réel x :

$$f'(x) = 2xe^x + (x^2 - 1)e^x = (x^2 + 2x - 1)e^x$$
$$f''(x) = (2x + 2)e^x + (x^2 + 2x - 1)e^x = (x^2 + 4x + 1)e^x$$

Comme $e^x > 0$ pour tout réel x, $f''(x)$ est du signe du trinôme $x^2 + 4x + 1$.
Son discriminant est $\Delta = 16 - 4 = 12 = (2\sqrt{3})^2 > 0$.
Le trinôme admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-4 - 2\sqrt{3}}{2} = -2 - \sqrt{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-4 + 2\sqrt{3}}{2} = -2 + \sqrt{3}$$

Comme le coefficient de x^2 est strictement positif ($a = 1$), le trinôme (et donc f'') est positif à l'extérieur des racines et négatif entre les racines.

Ainsi, f'' s'annule **et change de signe** en x_1 et en x_2. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet donc exactement deux points d'inflexion, aux abscisses $-2 - \sqrt{3}$ et $-2 + \sqrt{3}$.

4 Applications : Inégalités de convexité

La convexité est un outil remarquable pour démontrer des inégalités. Selon l'inégalité demandée, on utilisera l'une des deux propriétés géométriques fondamentales : la position par rapport aux tangentes ou la position par rapport aux cordes.

4.1 Méthode 1 : Utiliser les tangentes

C'est la méthode de loin la plus fréquente aux concours. Elle permet de majorer ou de minorer une fonction (souvent complexe) par une fonction affine (très simple).

Méthode 2 — Démontrer une inégalité avec une tangente : Pour montrer qu'une courbe est toujours au-dessus (ou en dessous) d'une droite d'équation $y = ax + b$:

1. On identifie la fonction f en jeu et on démontre sa convexité (ou concavité) sur un intervalle I, généralement en étudiant le signe de f''.
2. On cherche un point d'abscisse a où la tangente a pour équation $y = ax + b$.
3. On conclut en invoquant la propriété : « la fonction étant convexe, sa courbe est située au-dessus de toutes ses tangentes ».

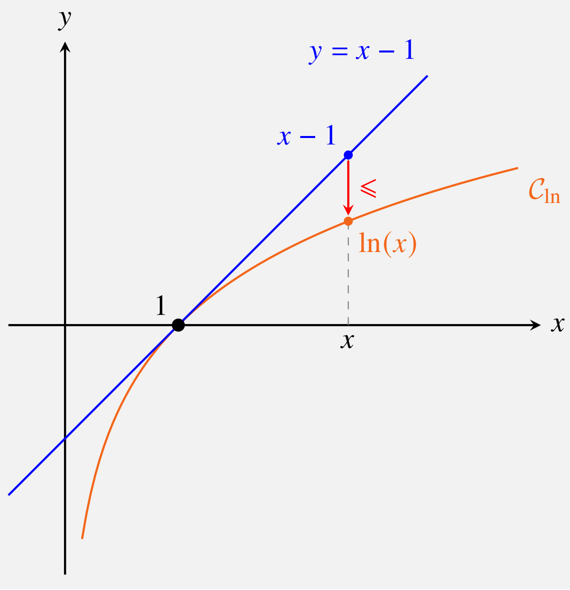
■ **Exemple 8 : Inégalité classique :** Montrons que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(x) \leqslant x - 1$.

Soit $f : x \mapsto \ln(x)$. La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{x}$ et $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$. Puisque $f''(x) < 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction ln est **concave** sur cet intervalle. Par conséquent, sa courbe représentative est située en dessous de toutes ses tangentes.

Calculons l'équation de la tangente au point d'abscisse $a = 1$:

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) = 1(x-1) + 0 = x - 1$$

La courbe de ln étant sous sa tangente en 1, on en déduit bien que pour tout $x > 0$, $\ln(x) \leqslant x - 1$.



4.2 Méthode 2 : Utiliser les cordes (et barycentres)

Cette méthode est utilisée pour montrer qu'une image "moyenne" est plus petite (ou plus grande) que la "moyenne" des images.

Méthode 3 — Démontrer une inégalité avec une corde : Si l'inégalité fait apparaître des combinaisons de type $tx_1 + (1-t)x_2$ (avec $t \in [0;1]$) ou simplement des milieux comme $\frac{x_1+x_2}{2}$:

1. On étudie la convexité de la fonction concernée.
2. On applique directement la définition de la convexité : $f(tx_1 + (1-t)x_2) \leqslant tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$.

Exemple 9 : Montrons que pour tous réels x et y, $e^{\frac{x+y}{2}} \leqslant \frac{e^x+e^y}{2}$.

La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$ (car sa dérivée seconde $t \mapsto e^t$ est strictement positive). D'après la définition de la convexité appliquée avec $x_1 = x$, $x_2 = y$, et $t = \frac{1}{2}$ (qui appartient bien à $[0;1]$), on a directement :

$$\exp\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) \leqslant \frac{1}{2}\exp(x) + \frac{1}{2}\exp(y)$$

Ce qui donne bien : $e^{\frac{x+y}{2}} \leqslant \frac{e^x+e^y}{2}$.