

1. Nombres complexes : forme algébrique

1 Ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes

1.1 Forme algébrique d'un nombre complexe

Définition 1 : Il existe un ensemble de nombres appelé **nombres complexes** et noté $\mathbb{C}$ tel que

- L'ensemble des réels $\mathbb{R}$ est inclus dans $\mathbb{C}$.
- Il existe un nombre complexe, noté i , et tel que $i^2 = -1$.
- L'addition et la multiplication des réels se prolonge "naturellement" dans l'ensemble des complexes.
- Pour tout nombre complexe z , il existe un couple de réels (a, b) tel que $z = a + ib$.

■ **Exemple 1 :** $2 + 3i$, $7i$, $\sqrt{5}$, $\frac{1}{2} - \frac{4}{5}i$ sont des nombres complexes.

L'addition et la multiplication des nombres réels se prolongent naturellement pour les nombres complexes. Le nombre i joue le rôle de facteur. Il ne faut toutefois pas oublier que $i^2 = -1$, notamment pour la multiplication. Ainsi, on peut développer, factoriser, et l'on retrouve évidemment les identités remarquables.

■ **Exemple 2 :** Soit $z = 2 + 5i$ et $z' = 1 - 3i$. Alors $z + z' =$ et

$$zz' =$$

$$\text{Enfin, } z^2 =$$

Propriété 1 : Soit a et b deux réels et $z = a + ib$. On a $z = 0$ si et seulement si $a = 0$ et $b = 0$.

Démonstration 1 :

□

Propriété 2 : Soit a, a', b et b' quatre réels. Alors $a + ib = a' + ib'$ si et seulement si $a = a'$ et $b = b'$.

Démonstration 2 :

□

1.2 Partie réelle et partie imaginaire d'un nombre complexe

Nous venons donc de démontrer que l'écriture $z = a + ib$ d'un nombre complexe z est unique. On peut donc définir la partie réelle et la partie imaginaire d'un nombre complexe.

Définition 2 : Soit z un nombre complexe. Il existe un **unique** couple de réels (a, b) tel que $z = a + ib$.

- a est appelée **partie réelle** de z , notée $Re(z)$.
- b est appelée **partie imaginaire** de z , notée $Im(z)$.
- L'écriture $z = a + ib$ est la **forme algébrique** de z .

Propriété 3 : Soit z et z' deux nombres complexes. Alors

- $Re(z + z') = Re(z) + Re(z')$ et $Im(z + z') = Im(z) + Im(z')$;
- $Re(zz') = Re(z)Re(z') - Im(z)Im(z')$ et $Im(zz') = Re(z)Im(z') + Im(z)Re(z')$.

Démonstration 3 :

□

Définition 3 : Soit z un nombre complexe.

- z est un nombre réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle.
- Si $Re(z) = 0$, on dit que z est un nombre imaginaire pur. On note $z \in i\mathbb{R}$.

■ **Exemple 3 :** $2i$ est un nombre imaginaire pur.

1.3 Résolution d'équations dans $\mathbb{C}$

L'unicité de l'écriture d'un nombre complexe sous forme algébrique permet de résoudre des équations dans $\mathbb{C}$.

■ **Exemple 4 :** Résoudre l'équation $(E) : 2z + i - 3 = 5i + 4z - 7$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Nous pouvons donc résoudre des équations dans $\mathbb{C}$ en utilisant les mêmes méthodes que pour les équations dans $\mathbb{R}$, à la différence que l'on peut avoir des solutions qui ne sont pas réelles. Il est également possible de poser $z = a + ib$ et d'identifier les parties réelles et imaginaires de chaque membre de l'équation.

Toutefois, il est important de garder à l'esprit que l'on ne peut pas comparer deux nombres complexes. Il n'existe pas de relation d'ordre sur $\mathbb{C}$. On ne résout donc pas d'inéquations dans $\mathbb{C}$.

2 Conjugué d'un nombre complexe

2.1 Définition et propriétés

Définition 4 : Soit a et b deux réels et $z = a + ib$.

Le **conjugué** de z est le nombre complexe noté $\bar{z}$ et qui vaut $\bar{z} = a - ib$.

■ **Exemple 5 :** Le conjugué de $7 + 3i$ est . Le conjugué de $2i$ est .

Propriété 4 : Soit $z \in \mathbb{C}$.

- z est réel si et seulement si $\bar{z} = z$;
- z est imaginaire pur si et seulement si $\bar{z} = -z$.

Démonstration 4 — Premier point :

□

La démonstration du deuxième point fait l'objet d'un exercice.

Propriété 5 : Soit z et z' deux nombres complexes. On a les propriétés suivantes

$$\overline{\bar{z}} = z \qquad \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}' \qquad \overline{zz'} = \bar{z} \times \bar{z}'$$

Démonstration 5 :

□

Propriété 6 : Soit z un nombre complexe et n un entier naturel non nul. Alors $\overline{z^n} = \bar{z}^n$.

Démonstration 6 :

□

Propriété 7 : Soit z un complexe. Soit a et b deux réels tels que $z = a + ib$. Alors

$$z\bar{z} = a^2 + b^2.$$

Démonstration 7 :

□

2.2 Résolution d'équation en z et $\bar{z}$

Lorsque des équations font intervenir z et $\bar{z}$, il est préférable d'écrire ces nombres sous forme algébrique, puis d'identifier les parties réelles et imaginaires de chaque membre de l'équation.

■ **Exemple 6 :** On souhaite résoudre l'équation $(E) : 2z + 3i - 5 = 3i\bar{z} - 2i + 5$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

3 Division dans $\mathbb{C}$

Jusqu'à présent, nous avons vu que l'addition, la soustraction et la multiplication s'étendent naturellement à l'ensemble $\mathbb{C}$. En appliquant les règles de calcul usuelles, le résultat de ces opérations s'exprime facilement sous forme algébrique.

L'extension de la division soulève en revanche une difficulté : que signifie diviser par un nombre complexe comme $2 + 3i$? Cette division aboutit-elle à un complexe ? Si oui, comment l'exprimer sous forme algébrique ?

Pour contourner ce problème, il faut se ramener à une notion fondamentale. Dans l'ensemble des nombres réels, diviser par un nombre non nul revient simplement à multiplier par son inverse. Nous allons adopter exactement la même démarche dans $\mathbb{C}$: avant de pouvoir définir le quotient de deux nombres complexes, il nous faut d'abord prouver que tout nombre complexe non nul possède un inverse par rapport à la multiplication.

3.1 Inverse d'un complexe

Propriété 8 : Soit z un nombre complexe non nul. Il existe un unique complexe z' tel que $zz' = z'z = 1$.

Démonstration 8 : Soit z un complexe non nul. Soit a et b les deux réels tels que $z = a + ib$ un nombre complexe non nul.

Puisque $z \neq 0$, les réels a et b ne sont pas simultanément nuls, ce qui garantit que $a^2 + b^2 \neq 0$.

Soit z' un complexe. Soit x et y les deux réels tels que $z' = x + iy$. Alors

$$(E) : zz' = 1 \Leftrightarrow (a + ib)(x + iy) = 1 \Leftrightarrow (ax - by) + i(bx + ay) = 1 + 0i.$$

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leurs parties réelles et imaginaires sont égales. On obtient donc le système linéaire suivant, d'inconnues x et y :

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} ax - by = 1 & (L_1) \\ bx + ay = 0 & (L_2) \end{cases}$$

Distinguons alors trois cas :

- Si $b = 0$, on a alors $a \neq 0$. Ainsi $(E) \Leftrightarrow x = 1/a$ et $y = 0$.
L'unique inverse de $z = a$ est donc $\frac{1}{a}$ (on retrouve ici le cas réel)
- Si $a = 0$, on a alors $b \neq 0$. Ainsi, $(E) \Leftrightarrow x = 0$ et $y = -1/b$.
L'unique inverse de $z = ib$ est donc $-\frac{1}{b}i$.

On suppose désormais que $a \neq 0$ et $b \neq 0$.

Puisque $a \neq 0$ et $b \neq 0$, on peut multiplier L_1 par a et L_2 par b en conservant l'équivalence stricte du système :

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} a^2x - aby = a & (L'_1) \\ b^2x + aby = 0 & (L'_2) \end{cases}$$

On remplace la première ligne par la somme des deux lignes ($L'_1 \leftarrow L'_1 + L'_2$), ce qui conserve l'équivalence :

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} (a^2 + b^2)x = a \\ b^2x + aby = 0 \end{cases}$$

Puisque $a^2 + b^2 \neq 0$, on peut isoler x dans la première ligne, puis substituer cette expression dans la seconde :

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{a^2 + b^2} \\ b^2 \times \left(\frac{a}{a^2 + b^2} \right) + aby = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{a^2 + b^2} \\ aby = -\frac{ab^2}{a^2 + b^2} \end{cases}$$

Puisque $a \neq 0$ et $b \neq 0$, on peut diviser la deuxième ligne par ab :

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{a^2 + b^2} \\ y = -\frac{b}{a^2 + b^2} \end{cases}$$

Le système admet donc un unique couple solution. Il existe ainsi un unique nombre complexe z' tel que $zz' = 1$, qui est :

$$z' = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2}$$

□

Définition 5 : Soit z un complexe non nul.

L'unique complexe z' tel que $zz' = 1$ est appelé inverse de z et est noté $\frac{1}{z}$ ou z^{-1} .

■ **Exemple 7 :** Déterminons l'inverse du nombre complexe $z = 1 + 2i$. En appliquant la formule démontrée précédemment, on obtient :

$$\frac{1}{1 + 2i} =$$

On peut par ailleurs vérifier que $(1 + 2i) \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i \right) = 1$.

Dans la pratique, on n'utilise presque jamais la formule de l'inverse telle quelle pour calculer un quotient.

En observant l'expression de l'inverse trouvée dans la démonstration $\left(z' = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} \right)$, on remarque que le numérateur correspond exactement au conjugué $\bar{z} = a - ib$, et le dénominateur correspond au produit $z\bar{z} = a^2 + b^2$ (qui est un nombre réel positif).

On a en réalité $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}$ (ce quotient est bien défini puisque le dénominateur est un réel strictement positif).

3.2 Quotient de deux complexes

Définition 6 : Soit z un complexe et z' un complexe non nul.

On définit le **quotient** de z par z' par $\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$.

Dans la pratique, pour exprimer un quotient sous forme algébrique, on utilise la remarque précédente.

Puisque $\frac{1}{z'} = \frac{\bar{z'}}{z'z'}$, l'opération de division revient à écrire $\frac{z}{z'} = z \times \frac{\bar{z'}}{z'z'} = \frac{z\bar{z'}}{z'z'}$.

Pour écrire un quotient sous forme algébrique, **on multiplie donc le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur.**

■ **Exemple 8 :** On souhaite exprimer $\frac{4+3i}{3-i}$ sous forme algébrique.

■ **Exemple 9 :** On souhaite résoudre l'équation $2z + 3 - i = (1 + i)z - 2 + i$. Soit donc $z \in \mathbb{C}$

Propriété 9 : Soit z un complexe et z' un complexe non nul. Alors

$$\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\bar{z'}} \quad \text{et} \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}.$$

Démonstration 9 :

□

4 Équations du second degré à coefficients réels

Propriété 10 : Soit a un réel strictement positif.

Les solutions de l'équation $z^2 = -a$ d'inconnue complexe z sont les complexes $i\sqrt{a}$ et $-i\sqrt{a}$.

Démonstration 10 :

□

■ **Exemple 10 :** Les solutions de l'équation $z^2 = -4$ sont .

L'exemple que nous venons de voir est un peu simpliste mais permet de vous rafraîchir la mémoire. Passons donc aux choses sérieuses.

Théorème 11 : Soit a, b et c des réels avec $a \neq 0$. Soit $P : z \mapsto az^2 + bz + c$.

Notons $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du polynôme P .

- Si $\Delta > 0$, alors P admet deux racines réelles distinctes : $\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$;
- Si $\Delta = 0$, alors P admet une racine réelle double : $-\frac{b}{2a}$;
- Si $\Delta < 0$, alors P admet deux racines complexes conjuguées : $\frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Démonstration 12 : Écrivons P sous forme canonique. Pour tout complexe z ,

$$az^2 + bz + c = a \left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = a \left(\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right).$$

- Si $\Delta > 0$, alors, pour tout complexe z ,

$$az^2 + bz + c = a \left(\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)^2 \right) = a \left(z + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(z + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right).$$

Ainsi, P possède deux racines réelles qui sont $\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

- Si $\Delta = 0$, alors pour tout complexe z , $az^2 + bz + c = a \left(z + \frac{b}{2a} \right)^2$. L'unique racine de P est $-\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, alors $-\Delta > 0$. Ainsi, pour tout complexe z ,

$$az^2 + bz + c = a \left(\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left(-\frac{\Delta}{4a^2} \right) \right) = a \left(\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - i^2 \times \left(\sqrt{\frac{-\Delta}{4a^2}} \right)^2 \right).$$

On se retrouve dans le même cas que dans la propriété précédente, et on procède donc de la même manière. Pour tout complexe z ,

$$az^2 + bz + c = a \left(\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right)^2 \right) = a \left(z + \frac{b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right) \left(z + \frac{b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right).$$

Ainsi, P admet deux racines complexes conjuguées : $\frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

□

■ **Exemple 11 :** On cherche à résoudre l'équation $2z^2 + 3z + 5 = 0$.

Remarque : La démonstration met en évidence la factorisation (dans $\mathbb{C}$) de tout polynôme de degré 2 à coefficients réels, peu importe la nature de leurs racines (réelles ou imaginaires).

Si z_1 et z_2 sont les deux racines du polynôme $az^2 + bz + c$, alors pour tout **complexe** z , on a

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2).$$