Compléments sur la dérivation

1 Rappels sur la dérivation

1.1 Fonction dérivée

Définition 1 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I, $a \in I$ et h un réel non nul tel que $a + h \in I$.

- On dit que f est dérivable en a si le taux de variation $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie lorsque h tend vers 0. Cette limite est appelée *nombre dérivé de f en a* et est notée $f'(a)$.

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

- On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout $a \in I$. On appelle alors *fonction dérivée* de f sur I la fonction

$$f' : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x). \end{array} \right.$$

▪ **Exemple 1 :** On considère la fonction $f : x \mapsto x^2$, définie sur $\mathbb{R}$.

1.2 Dérivées usuelles

$f : x \mapsto$	Définie sur	Dérivable sur	$f' : x \mapsto$
$mx + p$, m et p réels	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	
x^n pour $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	
$\dfrac{1}{x}$	$]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$	$]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$	
$\dfrac{1}{x^n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$	$]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$	$]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$	

$f : x \mapsto$	Définie sur	Dérivable sur	$f' : x \mapsto$
$\sqrt{x}$	$[0; +\infty[$	$]0; +\infty[$	
$\exp(ax + b)$, a et b réels	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	

1.3 Opérations sur les dérivées

Théorème 1 : Soit I un intervalle, u et v deux fonctions dérivables sur I, k un réel. Alors les fonctions $k\,u$, $u+v$ et uv sont dérivables sur I. Si de plus, v ne s'annule pas sur I, alors la fonction $\frac{u}{v}$ est également dérivable sur I. On a alors

$$(k\,u)' = k\,u' \qquad (u+v)' = u' + v'$$

$$(uv)' = u'v + uv' \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

▪ **Exemple 2 :** On considère la fonction $f : x \mapsto (x^2 - 3x + 1)\exp(3x + 1)$, définie sur $\mathbb{R}$.

1.4 Tangente à la courbe

Définition 2 — Tangente à la courbe : Soit f une fonction dérivable en a. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe de f dans un repère orthonormé $(O\,,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$.

La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a est la droite de coefficient directeur $f'(a)$ et passant par le point de coordonnée $(a; f(a))$.

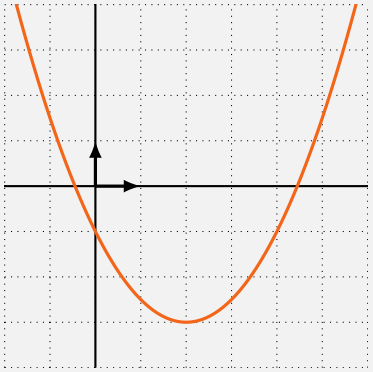
Propriété 1 : Soit f une fonction dérivable en a. La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a a pour équation

$$y = f'(a) \times (x - a) + f(a).$$

▪ **Exemple 3 :** Pour tout réel x, posons $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - 2x - 1$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a $f'(x) =$

Déterminons l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 4



1.5 Variations d'une fonction

Propriété 2 : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$, alors f est croissante sur I.
- Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$, alors f est décroissante sur I.
- Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.

▪ **Exemple 4 :** On considère la fonction $f : x \mapsto (x^2 - 3x + 1)\exp(3x + 1)$ étudiée précédemment. On a vu que pour tout réel x, on a $f'(x) = (3x^2 - 7x)\exp(3x + 1) = x(3x - 7)\exp(3x + 1)$.

2 Dérivée seconde

Définition 3 — Dérivée seconde : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I telle que sa fonction dérivée f' est également dérivable sur I (on dit également que f est deux fois dérivable sur I).

On appelle fonction *dérivée seconde* de f la fonction dérivée de f'. Cette fonction est notée f''.

Pour tout $x \in I$, $f''(x) = (f')'(x)$.

▪ **Exemple 5 :** Pour tout réel x, on pose $f(x) = (2x + 1)\mathrm{e}^{3x-2}$.

3 Composition de fonctions

Définition 4 — Fonction composée : Soit I et J deux parties de $\mathbb{R}$.
Soit f une fonction définie sur J et g une fonction définie sur I telle que pour tout réel x, $g(x) \in J$.

On définit la *fonction composée* de f et g notée $f \circ g$ par

Pour tout $x \in I$, $f \circ g(x) = f(g(x))$.

L'idée derrière la composition de fonctions est simplement d'appliquer successivement plusieurs fonctions.

$$f \circ g \ : \ x \overset{g}{\longmapsto} g(x) \overset{f}{\longmapsto} f[g(x)]$$

▪ **Exemple 6 :** Pour tout réel x, on note $f(x) = x^2$ et $g(x) = x + 3$. Alors, pour tout réel x,

- $f \circ g(x) =$
- $g \circ f(x) =$

Attention ! En général, on n'a pas $f \circ g = g \circ f$! Ces deux fonctions ne sont d'ailleurs pas forcément définies sur le même ensemble.

Propriété 3 : Soit I et J deux intervalles, f une fonction définie et dérivable sur J et g une fonction définie et dérivable sur I telle que pour tout $x \in I$, $g(x) \in J$. Alors $f \circ g$ est dérivable et pour tout réel x dans I,

$$(f \circ g)'(x) = g'(x) \times (f' \circ g)(x).$$

▪ **Exemple 7 :** On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \mathrm{e}^{x^2+3x-2}$.

Propriété 4 — Cas particuliers : Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I

- Pour tout entier naturel n, u^n est dérivable sur I et $(u^n)' =$
- e^u est dérivable sur I et $(\mathrm{e}^u)' =$
- Si pour tout réel $x \in I$, $u(x) > 0$, alors $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et $(\sqrt{u})' =$
- Si pour tout réel x, $u(x) \neq 0$, $\dfrac{1}{u}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{1}{u}\right)' =$

▪ **Exemple 8 :** Pour tout réel x, posons $f(x) = (4x + 1)^9$.

▪ **Exemple 9 :** Pour tout réel x, posons $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$.

▪ **Exemple 10 :** On considère la fonction f définie pour tout réel $x \in [-2; 2]$ par $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$.