Exercices

Rappels sur la dérivation

▸ Exercice 1 – Voir le corrigé

Dériver les fonctions suivantes, en précisant leur domaine de définition et de dérivation.

$f_1 : x \mapsto 5x^3 + 2x^2 - 3x + 1$

$f_2 : x \mapsto 8x^7 + \dfrac{4}{x^2}$

$f_3 : x \mapsto 2x^4 + \mathrm{e}^{3x-1}$

$f_4 : x \mapsto (5x^2 + 2x - 1)\mathrm{e}^x$

$f_5 : x \mapsto (1 - 6x^2)\mathrm{e}^{3x+2}$

$f_6 : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$

$f_7 : x \mapsto \dfrac{x^2 + 3x + 1}{x - 5}$

$f_8 : x \mapsto \dfrac{x + \mathrm{e}^3}{\mathrm{e}^x}$

▸ Exercice 2 – Voir le corrigé

On considère la fonction $f : x \mapsto x^3 + 3x^2 - 45x + 21$.

1. f est dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}$. Que vaut $f'(x)$?
2. Construire le tableau de signes de f' et en déduire le tableau de variations de f.

▸ Exercice 3 – Voir le corrigé

On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \dfrac{10x + 4}{5x^2 + 1}$

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Exprimer $f'(x)$ pour tout réel x.
2. Construire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$

▸ Exercice 4 – Voir le corrigé

Pour tout réel $x \neq -1$, on pose $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1 + x}$.

1. Justifier que f est dérivable sur $]-\infty; -1[$ et sur $]-1; +\infty[$ et que pour tout réel x dans ces intervalles

$$f'(x) = \frac{x\,\mathrm{e}^x}{(1 + x)^2}.$$

2. Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variations de f.

▸ Exercice 5 – Voir le corrigé

Construire le tableau de variations de la fonction $f : x \mapsto (-x^2 + x + 1)\mathrm{e}^{1-3x}$ définie sur $\mathbb{R}$.

▸ Exercice 6 (Centres étrangers 2024) – Voir le corrigé

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0,1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n\mathrm{e}^{-u_n}$

1. Déterminer le sens de variations de la fonction f définie pour tout réel $x \in [0; 1]$ par $f(x) = 2x\mathrm{e}^{-x}$.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

▸ Exercice 7 – Voir le corrigé

A l'aide d'une étude de fonction, montrer que pour tout réel x, on a $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$

Dérivée seconde

▸ Exercice 8 – Voir le corrigé

Pour chacune des fonctions suivantes, deux fois dérivables sur l'intervalle mentionné, donner une expression de la dérivée seconde.

$f_1 : x \mapsto 6x^2 + 2x - 1$ sur $\mathbb{R}$

$f_2 : x \mapsto 3x^2 + 2x - \dfrac{3}{x}$, sur $]-\infty; 0[$

$f_3 : x \mapsto x^2 e^{3x+1}$, sur $\mathbb{R}$

$f_4 : x \mapsto \dfrac{3x^2 - 1}{x}$, sur $]-\infty; 0[$

$f_5 : x \mapsto (1 - 6x^2)e^{3x+2}$, sur $\mathbb{R}$

$f_6 : x \mapsto \dfrac{e^x}{x}$, sur $]0; +\infty[$

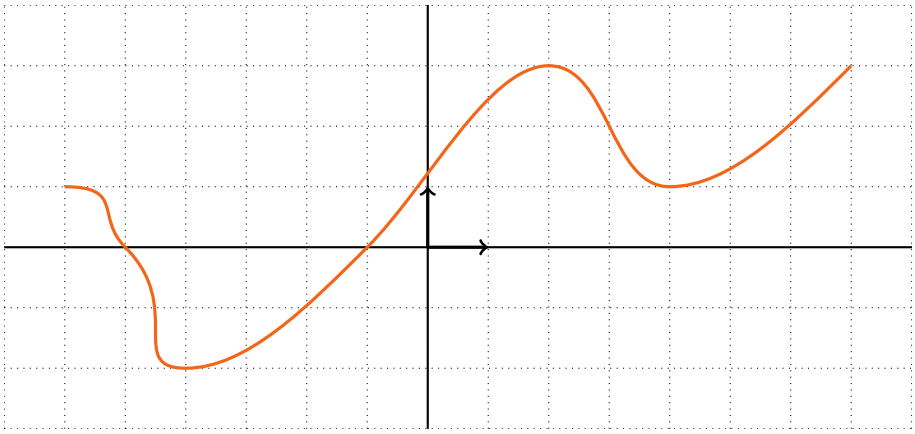
▸ Exercice 9 – Voir le corrigé

On considère la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^4 + 16x^3 - 66x^2 - 360x + 120$.

1. Soit x un réel. Que vaut $f'(x)$?
2. On note f'' la dérivée de f'. Que vaut $f''(x)$?
3. Construire la tableau de signes de f''.
4. En déduire le tableau de variations de f'.
5. On indique de plus que $f'(-5) = f'(3) = f'(-2) = 0$. Construire le tableau de signes de f' et en déduire le tableau de variations de f.

▸ Exercice 10 – Voir le corrigé

On considère une fonction f deux fois dérivable. On a représenté ci-dessous la courbe de f' dans un repère orthonormé.



On sait par ailleurs que $f(-6) = -1$, $f(-5,5) = 0$ et $f(-1) = 2$. Construire le tableau de signes de f'' et f sur l'intervalle $[-6; 7]$.

▸ Exercice 11 – Voir le corrigé

Soit f et g deux fonctions deux fois dérivables sur un intervalle I. Justifier que (fg) est deux fois dérivable sur I et exprimer $(fg)''$ en fonction de f, g et de leurs dérivées.

▸ Exercice 12 – Voir le corrigé

Soit a et b deux réels. Pour tout réel x, on pose $f(x) = (ax + b)\mathrm{e}^x$.

1. Justifier que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ puis donner une expression de $f'(x)$ et $f''(x)$.
2. Montrer que pour tout réel x, $f''(x) - 2f'(x) + f(x) = 0$.

▸ Exercice 13 – Voir le corrigé

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et n un entier naturel. Lorsqu'il est possible de dériver n fois la fonction f sur I, on dit que f est n fois dérivable et on note $f^{(n)}$ la fonction obtenue en dérivant n fois. On a alors $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$...

1. On considère la fonction $f : x \mapsto xe^x$. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, f est n fois dérivable et pour tout réel x, $f^{(n)}(x) = (x + n)e^x$.
2. On considère la fonction $g : x \mapsto xe^{-x}$. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, g est n fois dérivable et pour tout réel x, $g^{(n)}(x) = (-1)^n(x - n)e^x$.

Composition de fonctions

▸ Exercice 14 – Voir le corrigé

Pour tout réel x, on pose $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = 3x + 2$ et $h(x) = 2 - x$.
Donner une expression de $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$, $(h \circ g)(x)$ et $(f \circ g \circ h)(x)$.

▸ Exercice 15 – Voir le corrigé

Exprimer chacune des fonctions suivantes comme la composition de deux fonctions « usuelles ». On ne se souciera pas des domaines de définition.

$f_1 : x \mapsto e^{1+x^2}$ $\qquad$ $f_2 : x \mapsto (3x + 8)^7$ $\qquad$ $f_3 : x \mapsto \sqrt{1 + e^x}$

▸ Exercice 16 – Voir le corrigé

Soit f une fonction définie sur un ensemble E. On dit que f est une involution de E si pour tout $x \in E$, $(f \circ f)(x) = x$.

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est une involution de $\mathbb{R}^*$.
2. Soit a un réel. Montrer que la fonction $x \mapsto a - x$ est une involution de $\mathbb{R}$.
3. Soit a et b deux réels, avec $b \neq 0$. Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{b}{x - a} + a$ est une involution de $\mathbb{R} \setminus \{a\}$.

▸ Exercice 17 – Voir le corrigé

Dériver les fonctions suivantes, dérivables sur l'intervalle donné.

$f_1 : x \mapsto (3x + 2)^2$, sur $\mathbb{R}$ $\qquad$ $f_2 : x \mapsto (6x^2 + 3x + 4)^3$, sur $\mathbb{R}$

$f_3 : x \mapsto e^{\sqrt{x}}$, sur $]0; +\infty[$ $\qquad$ $f_4 : x \mapsto \sqrt{2x^2 - 5x + 7}$,sur $\mathbb{R}$

$f_5 : x \mapsto \dfrac{1}{(3x + 6)^2}$, sur $]-2; +\infty[$ $\qquad$ $f_6 : x \mapsto e^{x+\frac{1}{x}}$, sur $]-\infty; 0[$

▸ Exercice 18 – Voir le corrigé

On considère la fonction $f : x \mapsto e^{3x^2+2x-1}$, définie sur $\mathbb{R}$.

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel x.
2. Construire le tableau de variations de f.
3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse -1.

► Exercice 19 – Voir le corrigé

Construire le tableau de variations de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 4x + 5}$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ puis tracer l'allure de sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

► Exercice 20 – Voir le corrigé

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$. On note D le domaine de définition de f et D' son domaine de dérivabilité.

1. Déterminer D et D'.
2. Donner une expression de $f'(x)$ pour tout $x \in D'$.
3. Pour tout réel $x \in D$, on pose $g(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{1-x^2}}$.
   (a) Justifier que g est dérivable sur D' et calculer $g'(x)$ pour tout x dans D'.
   (b) En déduire le sens de variations de g puis tracer l'allure de la courbe représentative de g dans un repère orthonormé.

► Exercice 21 – Voir le corrigé

On considère la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{x^2+2x-5}$, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Construire le tableau de variation de f.
2. Déterminer une expression de $f''(x)$ pour tout réel x.

► Exercice 22 – Voir le corrigé

Pour tout réel x, on pose $f(x) = \left(\dfrac{x^2 - 2x - 3}{2}\right)^2$.

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel x.
2. En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$ et tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
3. Justifier que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Donner une expression de $f''(x)$ pour tout réel x.

► Exercice 23 – Voir le corrigé

Donner une expression de la dérivée seconde de la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{1/x}$ sur $]0; +\infty[$.

► Exercice 24 – Voir le corrigé

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{x}}$, définie sur $]0; +\infty[$.

1. Justifier que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{(2x-1)\mathrm{e}^x}{2x\sqrt{x}}$.
2. Construire le tableau de variations de la fonction f sur $]0; +\infty[$.

On considère désormais la fonction $g : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{x^2+x+1}}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$.

On peut remarquer que pour tout réel x, $g(x) = f(x^2 + x + 1)$.

3. Justifier que g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x,

$$g'(x) = \frac{(2x+1)(2x^2+2x+1)\mathrm{e}^{x^2+x+1}}{2(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}.$$

   Indication : ne pas utiliser la dérivée d'un quotient vous épargnera de longs et pénibles calculs.
4. Construire le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$.

Correction des exercices

▸ Correction de l'exercice 1 – Voir l'énoncé

a. Pour tout réel x, $f_1'(x) = 5 \times 3x^2 + 2 \times 2x - 3 = 15x^2 + 4x - 3$.

b. Pour tout réel non nul x, $f_2'(x) = 8 \times 7x^6 + 4 \times \left(-\dfrac{2}{x^3}\right) = 56x^6 - \dfrac{8}{x^3}$.

Remarque : en mettant au même dénominateur, on a $f_2'(x) = \dfrac{56x^9 - 8}{x^3}$.

c. Pour tout réel x, $f_3'(x) = 2 \times 4x^3 + 3e^{3x-1} = 8x^3 + 3\mathrm{e}^{3x-1}$.

d. Pour tout réel x, on pose $u(x) = 5x^2 + 2x - 1$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$.

- u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $u'(x) = 10x + 2$.
- v est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $v'(x) = \mathrm{e}^x$.

Ainsi, puisque $f_4 = uv$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_4' = u'v + uv'$. Pour tout réel x, on a donc

$$f_4'(x) = (10x + 2)\mathrm{e}^x + (5x^2 + 2x - 1)\mathrm{e}^x = (5x^2 + 12x + 1)\mathrm{e}^x.$$

e. Pour tout réel x, on pose $u(x) = 1 - 6x^2$ et $v(x) = \mathrm{e}^{3x+2}$.

- u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $u'(x) = -12x$.
- v est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $v'(x) = 3\mathrm{e}^{3x+2}x$.

Ainsi, puisque $f_5 = uv$, f_5 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = u'v + uv'$. Pour tout réel x, on a donc

$$f_5'(x) = -12x\mathrm{e}^{3x+2} + (1 - 6x^2) \times 3\mathrm{e}^{3x+2} = [-12x + (1 - 6x^2) \times 3]\mathrm{e}^{3x+2} = (-18x^2 - 12x + 3)\mathrm{e}^{3x+2}.$$

f. Pour tout réel non nul x, on pose $u(x) = \mathrm{e}^x$ et $v(x) = x$.

- u est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$, et pour tout réel non nul x, $u'(x) = \mathrm{e}^x$.
- v est dérivable et ne s'annule pas sur $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$, et pour tout réel non nul x, $v'(x) = 1$.

Ainsi, puisque $f_6 = \dfrac{u}{v}$, f est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$ et $f_6' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$. Pour tout réel non nul x, on a donc

$$f_6'(x) = \frac{\mathrm{e}^x \times x - \mathrm{e}^x \times 1}{x^2} = \frac{(x-1)\mathrm{e}^x}{x^2}.$$

g. Pour tout réel $x \neq 5$, on pose $u(x) = x^2 + 3x + 1$ et $v(x) = x - 5$.

- u est dérivable sur $]-\infty; 5[$ et $]5; +\infty[$, et pour tout réel $x \neq 5$, $u'(x) = 2x + 3$.
- v est dérivable et ne s'annule pas sur $]-\infty; 5[$ et $]5; +\infty[$, et pour tout réel $x \neq 5$, $v'(x) = 1$.

Ainsi, puisque $f = \dfrac{u}{v}$, f est dérivable sur $]-\infty; 5[$ et $]5; +\infty[$ et $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$. Pour tout réel $x \neq 5$, on a donc

$$f_7'(x) = \frac{(2x+3)(x-5) - (x^2 + 3x + 1)}{(x-5)^2} = \frac{2x^2 - 10x + 3x - 15 - x^2 - 3x - 1}{(x-5)^2} = \frac{x^2 - 10x - 16}{(x-5)^2}.$$

h. Pour tout réel x, on pose $u(x) = x + \mathrm{e}^3$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$.

- u est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, $u'(x) = 1$.
- v est dérivable et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, $v'(x) = \mathrm{e}^x$.

Ainsi, puisque $f = \dfrac{u}{v}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$. Pour tout réel x, on a donc

$$f_8'(x) = \frac{1 \times e^x - (x + e^3)e^x}{(e^x)^2} = \frac{(-x + 1 - e^3)e^x}{(e^x)^2} = \frac{-x + 1 - e^3}{e^x}.$$

▸ Correction de l'exercice 2 – Voir l'énoncé

Pour tout réel x, on a $f'(x) = 3x^2 + 6x - 45$.

Notons Δ le discriminant du polynôme $3x^2 + 6x - 45$. On a $\Delta = 6^2 - 4 \times 3 \times (-45) = 576 > 0$.

Le polynôme $3x^2 + 6x - 45$ admet donc deux racines réelles distinctes

$$x_1 = \frac{-6 - \sqrt{576}}{2 \times 3} = -5 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-6 + \sqrt{576}}{2 \times 3} = 3.$$

Par ailleurs, le signe d'un polynôme est celui de son coefficient dominant (ici, 3) à l'extérieur des racines. Il est du signe opposé entre les racines. On peut alors dresser le tableau de signe de f' et en déduire le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		-5		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		↗	196	↘	-60	↗	

▸ Correction de l'exercice 3 – Voir l'énoncé

Pour tout réel x, on pose $u(x) = 10x + 4$ et $v(x) = 5x^2 + 1$

- u est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, $u'(x) = 10$
- v est dérivable et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, $v'(x) = 10x$

Ainsi, puisque $f = \dfrac{u}{v}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$. Pour tout réel x, on a donc

$$f'(x) = \frac{10 \times (5x^2 + 1) - (10x + 4) \times 10x}{(5x^2 + 1)^2} = \frac{-50x^2 - 40x + 10}{(5x^2 + 1)^2}$$

Pour tout réel x, $(5x^2 + 1)^2 > 0$. Il ne reste qu'à étudier le signe de $-50x^2 - 40x + 10$. C'est un polynôme du second degré dont le discriminant vaut $(-40)^2 - 4 \times 10 \times (-50) = 3600 > 0$. Ce polynôme admet donc deux racines réelles distinctes qui sont

$$x_1 = \frac{-(-40) + \sqrt{3600}}{2 \times (-50)} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-40) - \sqrt{3600}}{2 \times (-50)} = \frac{1}{5} = 0.2$$

On peut alors construire le tableau de signes de f' et en déduire le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		-1		0.2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$\searrow$		-1	$\nearrow$	5	$\searrow$	

► Correction de l'exercice 4 – Voir l'énoncé

Pour tout réel $x \neq -1$, on pose $u(x) = \mathrm{e}^x$ et $v(x) = 1 + x$.

- u est dérivable sur $]-\infty;-1[$ et $]-1;+\infty[$, et pour tout réel $x \neq -1$, $u'(x) = \mathrm{e}^x$.
- v est dérivable et ne s'annule pas sur $]-\infty;-1[$ et $]-1;+\infty[$, et pour tout réel $x \neq -1$, $v'(x) = 1$.

Ainsi, puisque $f = \dfrac{u}{v}$, f est dérivable sur $]-\infty;-1[$ et $]-1;+\infty[$ et $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$. Pour tout réel $x \neq -1$,

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x \times (1+x) - \mathrm{e}^x \times 1}{(1+x)^2} = \frac{x\mathrm{e}^x}{(1+x)^2}$$

Pour tout réel $x \neq -1$, $(1+x)^2 > 0$ et $\mathrm{e}^x > 0$. $f'(x)$ est donc du signe de x (hormis en -1, valeur interdite).

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	$\searrow$		‖	$\searrow$	1	$\nearrow$	

► Correction de l'exercice 5 – Voir l'énoncé

Pour tout réel x, on pose $u(x) = -x^2 + x + 1$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$.

- u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $u'(x) = -2x + 1$
- v est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $v'(x) = \mathrm{e}^x$

Ainsi, puisque $f = uv$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = u'v + uv'$. Pour tout réel x, on a donc

$$f'(x) = (-2x+1)\mathrm{e}^x + (-x^2 + x + 1)\mathrm{e}^x = (-x^2 - x + 2)\mathrm{e}^x.$$

Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > 0$. Il ne reste donc qu'à étudier le signe de $-x^2 - x + 2$. Il s'agit d'un polynôme du second degré. Son discriminant vaut $\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-1) \times 2 = 9 > 0$. Le polynôme $-x^2 - x + 2$ admet donc deux racines réelles distinctes

$$x_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{9}}{2 \times (-1)} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-1) + \sqrt{9}}{2 \times (-1)} = -2.$$

On peut alors construire le tableau de signes de f' et en déduire le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		↘	$3e^{-2}$	↗	e	↘	

▸ Correction de l'exercice 6 – Voir l'énoncé

La fonction f est dérivable comme produit de fonctions dérivables sur $[0;1]$

De plus, pour tout réel $x \in [0;1]$, on a

$$f'(x) = 2 \times \mathrm{e}^{-x} + 2x \times (-\mathrm{e}^{-x}) = (2-2x)\mathrm{e}^{-x}.$$

Or, pour tout $x \in [0;1]$, $\mathrm{e}^{-x} > 0$. Par ailleurs, si $0 \leqslant x \leqslant 1$, on a $0 \geqslant -2x \geqslant -2$ et donc $2 \geqslant 2-2x \geqslant 0$. En particulier, pour tout $x \in [0;1]$, $2-2x \geqslant 0$.

Ainsi, pour tout réel positif $x \in [0;1]$, $f'(x) \geqslant 0$. f est donc croissante sur $[0;1]$.

Pour tout entier naturel n, on considère la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$ ».

- **Initialisation :** Pour $n = 0$, on a $u_0 = 0,1$ et $u_1 = 2 \times 0,1 \times \mathrm{e}^{-0,1} \simeq 0,18$. On a bien $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 1$. $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.La fonction f étant croissante sur $[0;1]$, on peut l'appliquer à cette inégalité sans en changer le sens. Ainsi,

  $$f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(1).$$

  Or, $f(0) = 0$, $f(u_n) = u_{n+1}$, $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ et $f(1) = \dfrac{2}{e} \leqslant 1$. Il en vient que

  $$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \frac{2}{e} \leqslant 1.$$

  $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion** : $\mathcal{P}(0)$ est vraie. $\mathcal{P}$ est héréditaire. Par récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

▸ Correction de l'exercice 7 – Voir l'énoncé

Pour tout réel x, on pose $f(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = \mathrm{e}^x - 1$. On sait par ailleurs que $e^x \geqslant 1 \Leftrightarrow x \geqslant 0$. On en déduit le tableau de signes de f' et le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		↘	0	↗	

On a en effet $f(0) = \mathrm{e}^0 - 0 - 1 = 0$. Ainsi, pour tout réel x, $f(x) \geqslant 0$, soit $\mathrm{e}^x - x - 1 \geqslant 0$ ou $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$.

Graphiquement, cela signifie que la courbe de la fonction exponentielle est toujours au-dessus de sa tangente en 0.

▸ Correction de l'exercice 8 – Voir l'énoncé

Pour tout réel x, $f_1'(x) = 12x + 2$ et $f_1''(x) = 12$.

Pour tout réel $x < 0$, $f_2'(x) = 6x + \dfrac{3}{x^2}$ et $f_2''(x) = 6 - \dfrac{6}{x^3}$.

Pour tout réel x, on pose $u_1(x) = x^2$ et $v_1(x) = \mathrm{e}^{3x+1}$. u_1 et v_1 sont dérivables sur $\mathbb{R}$. f est donc également dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = u_1'v_1 + u_1v_1'$. Ainsi, pour tout réel x,

$$f_3'(x) = 2x \times \mathrm{e}^{3x+1} + x^2 \times 3\mathrm{e}^{3x+1} = (3x^2 + 2x)\mathrm{e}^{3x+1}.$$

Pour tout réel x, on pose $u_2(x) = 3x^2 + 2x$ et $v_2(x) = \mathrm{e}^{3x+1}$. u_2 et v_2 sont dérivables sur $\mathbb{R}$, f_3' l'est donc également et $f_3'' = u_2'v_2 + u_2v_2'$. Ainsi, pour tout réel x,

$$f_3''(x) = (6x + 2)\mathrm{e}^{3x+1} + (3x^2 + 2x) \times 3\mathrm{e}^{3x+1} = (3x^2 + 12x + 2)\mathrm{e}^{3x+1}.$$

On peut remarquer que pour tout réel $x < 0$, $f_4(x) = \dfrac{3x^2}{x} - \dfrac{1}{x} = 3x - \dfrac{1}{x}$.

Ainsi, pour tout réel $x < 0$, $f_4'(x) = 3 + \dfrac{1}{x^2}$ et $f_4''(x) = -\dfrac{2}{x^3}$.

Pour tout réel x, on pose $u_1(x) = 1 - 6x^2$ et $v_1(x) = \mathrm{e}^{3x+2}$.

- u_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $u_1'(x) = -12x$.
- v_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $v_1'(x) = 3\mathrm{e}^{3x+2}x$.

Ainsi, puisque $f_5 = u_1v_1$, f_5 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_5' = u_1'v_1 + u_1v_1'$. Pour tout réel x, on a donc

$$f_5'(x) = -12x\mathrm{e}^{3x+2} + (1 - 6x^2) \times 3\mathrm{e}^{3x+2} = [-12x + (1 - 6x^2) \times 3]\mathrm{e}^{3x+2} = (-18x^2 - 12x + 3)\mathrm{e}^{3x+2}.$$

Pour tout réel x, on pose alors $u_2(x) = -18x^2 - 12x + 3$ et $v_2(x) = \mathrm{e}^{3x+2}$. u_2 et v_2 sont dérivables sur $\mathbb{R}$, f_5' l'est donc également. Pour tout réel x,

$$f_5''(x) = (-36x - 12)\mathrm{e}^{3x+2} + (-18x^2 - 12x + 3) \times 3\mathrm{e}^{3x+2} = (-54x^2 - 72x - 3)\mathrm{e}^{3x+2}.$$

Pour tout réel $x > 0$, on pose $u_1(x) = \mathrm{e}^x$ et $v_1(x) = x$. u_1 et v_1 sont dérivables sur $]0; +\infty[$ et v ne s'annule pas sur cet intervalle. Ainsi, f_6 est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout réel x,

$$f_6'(x) = \frac{e^x \times x - e^x \times 1}{x^2} = \frac{(x-1)e^x}{x^2}.$$

Posons alors, pour tout réel $x > 0$, $u_2(x) = (x - 1)\mathrm{e}^x$ et $v_2(x) = x^2$. v_2 est dérivable et ne s'annule pas sur $]0; +\infty[$. Par ailleurs, u_1 est dérivable sur $]0; +\infty[$ car c'est un produit de fonctions dérivables sur cet intervalle. Pour tout réel $x > 0$

$$u_1'(x) = 1 \times \mathrm{e}^x + (x - 1)\mathrm{e}^x = x\mathrm{e}^x$$

Ainsi, pour tout réel $x > 0$

$$f_6''(x) = \frac{x\mathrm{e}^x \times x^2 - (x-1)\mathrm{e}^x \times 2x}{x^4} = \frac{(x^3 - 2x^2 + 2x)\mathrm{e}^x}{x^4} = \frac{(x^2 - 2x + 2)\mathrm{e}^x}{x^3}$$

▸ Correction de l'exercice 9 – Voir l'énoncé

Pour tout réel x, $f'(x) = 12x^3 + 48x^2 - 132x - 360$ et $f''(x) = 36x^2 + 96x - 132$.

f'' est une fonction polynôme du second degré dont le discriminant vaut $96^2 - 4 \times 36 \times (-132) = 28224 > 0$. L'équation $f''(x) = 0$ admet donc deux solutions réelles

$$x_1 = \frac{-96 - \sqrt{28224}}{2 \times 36} = -\frac{11}{3} \quad \text{et} x_2 = \frac{-96 + \sqrt{28224}}{2 \times 36} = 1.$$

On peut alors construire le tableau de signes de f''. Par ailleurs, f'' étant la dérivée de f', on en déduit le tableau de variations de f'.

x	$-\infty$		$-11/3$		1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f'		↗		↘		↗	

Puisque f' est croissante sur $]-\infty;5]$ et que $f'(5) = 0$, on en déduit que pour tout réel $x \leqslant 5$, $f'(x) \leqslant 0$. En raisonnant de même sur les autres intervalles, on en déduit le tableau de signes de f' et donc le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		-5		$-11/3$		-2		1		3		$+\infty$
$f''(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$			
f'		↗	0	↗		↘	0	↘		↗	0	↗	
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
f		↘		↗		↗		↘		↘		↗	

▸ Correction de l'exercice 10 – Voir l'énoncé

f'' est la dérivée de f'. Les variations de f' nous donnent donc le signe de f''.

x	-6		-4		2		4		7
f'	1	↘	-2	↗	3	↘	1	↗	3
f''		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Par ailleurs, à l'aide du signe de f', on peut construire le tableau de variations de f. Les informations sur les valeurs extrêmes de f nous permettent de construire son tableau de signes.

x	-6		-5.5		-5		-1		7
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+-$	0
f			0		$\geqslant 0$		2		
$f(x)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	

► Correction de l'exercice 11 – Voir l'énoncé

Si f et g sont dérivables, alors fg l'est également et $(fg)' = f'g + fg'$. Si de plus f' et g' sont dérivables, alors $f'g$ et fg' le sont également et

- $(f'g)' = f''g + f'g'$;
- $(fg')' = f'g' + fg''$.

Ainsi, $(fg)'$ est dérivable et $(fg)'' = f''g + f'g' + f'g' + fg'' = f''g + 2f'g' + fg''$.

► Correction de l'exercice 12 – Voir l'énoncé

Les fonctions $x \mapsto ax + b$ et $x \mapsto \mathrm{e}^x$ sont deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$. Leur produit est donc deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, $f'(x) = a\mathrm{e}^x + (ax+b)\mathrm{e}^x = (ax+a+b)e^x$ et $f''(x) = a\mathrm{e}^x + (ax+a+b)\mathrm{e}^x = (ax+2a+b)\mathrm{e}^x$. Ainsi, pour tout réel x,

$$f''(x) - 2f'(x) + f(x) = (ax + 2a + b)\mathrm{e}^x - 2(ax + a + b)\mathrm{e}^x + (ax + b)\mathrm{e}^x$$

et donc

$$f''(x) - 2f'(x) + f(x) = (ax + 2a + b - 2ax - 2a - 2b + ax + b)\mathrm{e}^x = 0$$

► Correction de l'exercice 13 – Voir l'énoncé

Pour tout entier naturel n, on considère la proposition $P(n)$: « f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f^{(n)}(x) = (x + n)\mathrm{e}^x$ ».

- **Initialisation** : f est bien dérivable 0 fois et pour tout réel x, $f^{(0)}(x) = f(x) = (x + 0)\mathrm{e}^x$.
- **Hérédité** : Soit n un entier naturel. Supposons que $P(n)$ est vraie. Alors f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f^{(n)}(x) = (x + n)\mathrm{e}^x$. $f^{(n)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. f est donc $n + 1$ fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, pour tout réel x,

  $$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = \mathrm{e}^x + (x + n)\mathrm{e}^x = (x + n + 1)\mathrm{e}^x.$$

  $P(n + 1)$ est donc vraie.
- **Conclusion** : $P(0)$ est vraie, P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Pour tout entier naturel n, on considère la proposition $P(n)$: « g est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $g^{(n)}(x) = (-1)^n(x - n)\mathrm{e}^{-x}$ ».

- **Initialisation** : g est bien dérivable 0 fois et pour tout réel x, $g^{(0)}(x) = g(x) = (-1)^0(x-0)\mathrm{e}^{-x}$. $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : Soit n un entier naturel. Supposons que $P(n)$ est vraie. Alors g est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $g^{(n)}(x) = (-1)^n(x-n)\mathrm{e}^{-x}$. $g^{(n)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. g est donc $n+1$ fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, pour tout réel x,
$$\begin{aligned} g^{(n+1)}(x) = (g^{(n)})'(x) &= (-1)^n \times (\mathrm{e}^{-x} + (x-n) \times (-\mathrm{e}^{-x})) \\ &= (-1)^n(1-x+n)\mathrm{e}^{-x} \\ &= (-1)^n \times (-(x-n-1))\mathrm{e}^{-x} \\ &= (-1)^{n+1}(x-(n+1))\mathrm{e}^{-x}. \end{aligned}$$
$P(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion** : $P(0)$ est vraie, P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

▸ Correction de l'exercice 14 – Voir l'énoncé

Pour tout réel x,

- $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x)^2 + 1 = (3x+2)^2 + 1 = 9x^2 + 12x + 5$.
- $(g \circ f)(x) = 3f(x) + 2 = 3(x^2+1) + 2 = 3x^2 + 5$.
- $(h \circ g)(x) = 2 - g(x) = 2 - (3x+2) = -3x$.
- $(f \circ g \circ h)(x) = (f \circ g)(h(x)) = (3h(x)+2)^2 + 1 = (8-3x)^2 + 1 = 9x^2 - 48x + 65$.

▸ Correction de l'exercice 15 – Voir l'énoncé

Pour tout réel x, on pose $u(x) = \mathrm{e}^x$ et $v(x) = 1 + x^2$. On a alors $f_1 = u \circ v$.

Pour tout réel x, on pose $u(x) = x^7$ et $v(x) = 3x + 8$. On a alors $f_2 = u \circ v$.

Pour tout réel positif x positif, on pose $u(x) = \sqrt{(x)}$. Pour tout réel x, on pose $v(x) = 1 + \mathrm{e}^x$. On a alors $f_3 = u \circ v$.

▸ Correction de l'exercice 16 – Voir l'énoncé

Pour tout réel $x \neq 0$, $f(f(x)) = \dfrac{1}{\frac{1}{x}} = x$. f est bien une involution de $\mathbb{R}^*$.

Pour tout réel x, $f(f(x)) = a - (a-x) = x$. f est une involution de $\mathbb{R}$.

Pour tout réel $x \neq a$,

$$f(f(x)) = \frac{b}{\left(\frac{b}{x-a} + a\right) - a} + a = \frac{b}{\dfrac{b}{x-a}} + a = x - a + a = x.$$

f est une involution de $\mathbb{R} \setminus \{a\}$.

▸ Correction de l'exercice 17 – Voir l'énoncé

a. Pour tout réel x, $f_1'(x) = 3 \times 2(3x+2) = 18x + 12$.

b. Pour tout réel x, $f_2'(x) = (12x+3) \times 3(6x^2+3x+4)^2 = (36x+9)(6x^2+3x+4)^2$.

c. Pour tout réel $x > 0$, $f_3'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \times \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$.

d. Pour tout réel x, $f_4'(x) = \dfrac{4x-5}{2\sqrt{2x^2-5x+7}}$.

e. Pour tout réel $x > 2$, $f_5'(x) = 3 \times \left(-\dfrac{2}{(3x+6)^3}\right) = -\dfrac{6}{(3x+6)^3}$.

f. Pour tout réel $x \neq 0$, $f_6'(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right) \mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}$.

▸ Correction de l'exercice 18 – Voir l'énoncé

Pour tout réel x, $f(x) = \mathrm{e}^{u(x)}$ avec $u(x) = 3x^2 + 2x - 1$. u est dérivable sur $\mathbb{R}$, f l'est donc aussi et $f' = u'e^u$. Ainsi, pour tout réel x,

$$f'(x) = (6x+2)\mathrm{e}^{3x^2+2x-1}.$$

Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{3x^2+2x-1} > 0$, $f'(x)$ est donc du signe de $6x + 2$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		↘	1	↗	

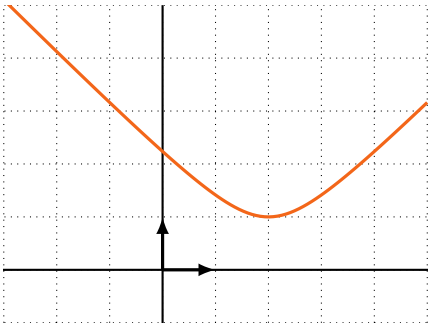
La tangente à la courbe de f à l'abscisse -1 a pour équation $y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$ soit $y = -4(x+1) + 1$ ou encore $y = -4x - 3$.

▸ Correction de l'exercice 19 – Voir l'énoncé

Pour tout réel x, $x^2 - 4x + 5 > 0$. En effet, il s'agit d'un polynôme du second degré dont le discriminant est strictement négatif. De plus, $f(x) = \sqrt{u(x)}$. Ainsi, f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a donc $f'(x) = \dfrac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+5}}$. Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2-4x+5} > 0$, $f'(x)$ est du signe de $2x - 4$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		↘	1	↗	

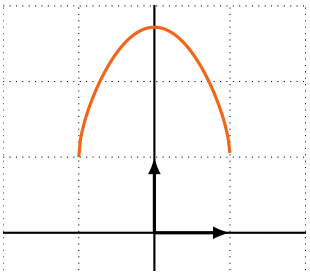


▸ Correction de l'exercice 20 – Voir l'énoncé

1. $\sqrt{1-x^2}$ existe si et seulement si $1-x^2 \geqslant 0$, c'est-à-dire $x^2 \leqslant 1$ et donc $x \in [-1;1]$. Par ailleurs, la fonction racine carrée n'est pas dérivable en zéro. Ainsi, f n'est pas dérivable en -1 et 1, qui sont les solutions de l'équation $1-x^2=0$. On a donc $D' =]-1;1[$.
2. Pour tout $x \in D'$, $f'(x) = \dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.
3. (a) On a $g = \mathrm{e}^f$. Or, f est dérivable sur D', g l'est donc également et pour tout réel x de D',
$$g'(x) = f'(x) \times \mathrm{e}^{f(x)} = -\frac{x\mathrm{e}^{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-x^2}}.$$
(b) Puisque pour tout réel $x \in D$, $\sqrt{1-x^2} > 0$ et $e^{-\sqrt{1-x^2}} > 0$, $g'(x)$ est du signe de $-x$.

x	-1		0		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	1	↗	e	↘	1

(c) On trace l'allure de la courbe représentative de g dans un repère orthonormé.



▸ Correction de l'exercice 21 – Voir l'énoncé

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = (2x+2)\mathrm{e}^{x^2+2x-5}$ qui est du signe de $2x+2$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		↘	e^{-6}	↗	

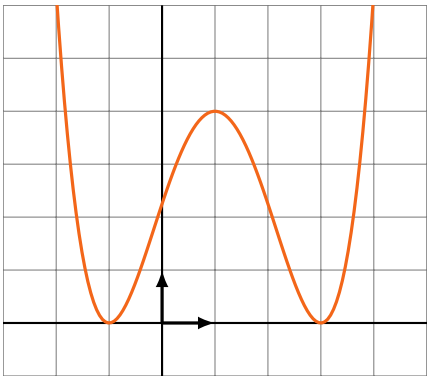
En utilisant la dérivée d'un produit, pour tout réel x, on a
$$f''(x) = 2 \times \mathrm{e}^{x^2+2x-5} + (2x+2) \times (2x+2)\mathrm{e}^{x^2+2x-5} = (4x^2+8x+6)\mathrm{e}^{x^2+2x-5}.$$

▸ Correction de l'exercice 22 – Voir l'énoncé

Pour tout réel x, on pose $u(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{2}$. u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f = u^2$. f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = 2u'u$. Pour tout réel x,
$$f'(x) = 2 \times (x-1) \times \frac{x^2-2x-3}{2} = (x-1)(x^2-2x-3).$$

Le polynôme $x^2 - 2x - 3$ s'annule en -1 et en 3. Ainsi, pour tout réel x, $f'(x) = (x-1)(x+1)(x-3)$. On peut alors construire le tableau de signes de f' et le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	



f' est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et est donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x,

$$f''(x) = 1 \times (x^2 - 2x - 3) + (x-1) \times (2x - 2) = 3x^2 - 6x - 1.$$

▸ Correction de l'exercice 23 – Voir l'énoncé

Pour tout réel $x > 0$, on pose $u(x) = \dfrac{1}{x}$. u est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $f = \mathrm{e}^u$. f est donc dérivable sur $]0;+\infty[$ et $f' = u'\mathrm{e}^u$. Ainsi, pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = -\dfrac{\mathrm{e}^{1/x}}{x^2}$.

f' est également dérivable comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0;+\infty[$. Par ailleurs, pour tout réel $x > 0$,

$$f''(x) = -\left(\frac{-\dfrac{\mathrm{e}^{1/x}}{x^2} \times x^2 - \mathrm{e}^{1/x} \times 2x}{(x^2)^2}\right) = \frac{(2x+1)\mathrm{e}^{1/x}}{x^4}.$$

▸ Correction de l'exercice 24 – Voir l'énoncé

1. Les fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^x$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ sont dérivables sur $]0;+\infty[$. De plus, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ ne s'annule pas sur cet intervalle. Ainsi, f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et, pour tout réel $x > 0$, on a

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x \times \sqrt{x} - \mathrm{e}^x \times \frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}^2} = \frac{1}{x} \times \frac{\mathrm{e}^x\sqrt{x} \times 2\sqrt{x} - \mathrm{e}^x}{2\sqrt{x}} = \frac{(2x-1)\mathrm{e}^x}{2x\sqrt{x}}.$$

2. Pour tout réel $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $(2x-1)$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		↘	$\sqrt{2e}$	↗	

3. La fonction $u : x \mapsto x^2+x+1$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, pour tout réel x, $x^2+x+1 > 0$ (on calcule le discriminant du polynôme x^2+x+1, celui-ci est strictement négatif). Ainsi, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$g'(x) = u'(x) \times f'(u(x)) = (2x+1) \times \frac{(2(x^2+x+1)-1)e^{x^2+x+1}}{2(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$$

et donc

$$g'(x) = \frac{(2x+1)(2x^2+2x+1)\mathrm{e}^{x^2+x+1}}{2(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}.$$

4. $g'(x)$ est du signe de $(2x+1)$ (on vérifie que pour tout réel x, $2x^2+2x+1 > 0$ à l'aide du discriminant par exemple).

x	0		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		↘	$g\left(-\frac{1}{2}\right)$	↗	